Sisällys

Harjoituskirjan käyttäjälle

Matikalla Maailmalle -harjoituskirja sisältää jokaisesta pitkän matematiikan pakollisesta kurssista käsitekartan, kymmenen perustehtävää ja kokoelman kurssiin liittyvistä ylioppilaskokeen tehtävistä.

Matikalla Maailmalle -harjoituskirjan tehtävien avulla voit valmistautua pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksiin. Kurssiin liittyvien tehtävien alussa olevat käsitekartat auttavat sinua kokoamaan kurssin keskeiset asiat. Tavoitteena on laskuvalmiuksien parantaminen ja lukion pitkän matematiikan oppimäärän kokonaisuuden hahmottaminen.

Kirjoituksiin voit alkaa valmistautua jo heti kolmannen vuoden syksyllä tämän harjoituskirjan avulla esimerkiksi kokoontumalla muiden opiskelijoiden ja opettajan kanssa kahden tunnin ajan joka viikko syyslukukaudella. Tällöin voit laskea jokaiselle tapaamiskerralle opettajan määräämät tehtävät etukäteen. Nämä tehtävät sekä niiden täydelliset ratkaisut voidaan käydä kokoontumiskerran tunneilla läpi.

Voit käyttää harjoituskirjaa myös itsenäisesti ja laatia itsellesi työskentelyaikataulun. Käy läpi käsitekartta kahteen kertaan niin, että ensimmäisellä kerralla hahmotat kokonaisuuden ja toisella kerralla selvität käsitekartan osat tarkemmin. Lue tehtävät tarkasti ja ratkaise ne välivaiheineen sekä käytä sovittuja matemaattisia merkintöjä. Näin harjoituskirja toimii myös tukimateriaalina meneillään olevien kurssien harjoittelemiseen ja kurssikokeeseen valmistautumiseen.

Harjoituskirjan lopussa ovat perustehtävien vastaukset. Ylioppilastehtävien ratkaisutiivistelmät löytyvät internetistä esimerkiksi osoitteesta:
http://matta.hut.fi/matta2/www/yoteht.html tai täydelliset ratkaisut MFKA:n MATEMATIIKAN ylioppilastehtävät ratkaisuineen (pitkä oppimäärä) kirjoista.

Toivomme, että Matikalla Maailmalle -harjoituskirjasta on hyötyä lukion uusimman opetussuunnitelman perusteiden 2003 pitkän matematiikan tehtävien harjoittelussa.

Hyvien tuloksien saavuttamiseen tarvitaan ahkeraa harjoittelua!

Opettajalle

Voit käyttää Matikalla Maailmalle -harjoituskirjaa kertauskurssilla tai tukiopetusmateriaalina pitkän matematiikan eri kursseilla.

Opettajalle on saatavilla harjoituskirjan tehtävien täydelliset ratkaisut CD-levyllä.

Kalajoella 24.6.2008
Minna Kaila, Harri Kotiaho ja Päivi Ojala

MAA1 Funktiot ja yhtälöt

- **Luvut ja laskutoimitukset**
  - Lukujoukot
    - N Z Q R
  - Vastaluku
    - $a + (-a) = 0$
  - Käänteisluku
    - $a \cdot \frac{1}{a} = 1,\ a \neq 0$
  - Itseisarvo
    - $|a| = \begin{cases} a, \text{ kun } a \geq 0 \\ -a, \text{ kun } a < 0 \end{cases}$
    - Ominaisuuksia:
      - $|a| \geq 0$
      - $|-a| = |a|$
      - $|ab| = |a||b|$
      - $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
      - $|a|^2 = a^2$
  - Laskujärjestys
  - Murtolukujen laskutoimitukset
- **Funktio**
  - $\mathcal{M}_f$, $\mathcal{A}_f$
  - Parillinen ja pariton potenssifunktio $f(x) = x^n$
  - Eksponenttifunktio $f(x) = a^x$, $a > 0,\ a \neq 1$
- **Potenssi**
  - Kymmenpotenssimuoto
  - Laskusäännöt:
    - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
    - $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
    - $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
    - $\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$
    - $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
    - $(-a)^n = a^n$, kun n parillinen
    - $(-a)^n = -a^n$, kun n pariton
    - $a^0 = 1,\ a \neq 0$
    - $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n,\ a \neq 0$
- **Murtopotenssi**
  - Määritelmä:
    - $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, kun $a > 0$, $m \in Z, n = 1, 2, 3, \ldots$
- **Yleinen juuri**
  - Parillinen ja pariton juuri
  - Potenssiyhtälö
  - Ominaisuuksia:
    - $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
    - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
    - $\sqrt[n]{a^n} = a$, kun $n = 1, 3, 5, \ldots$
    - $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, kun $n = 2, 4, 6, \ldots$
- **Neliöjuuri**
  - Nimittäjässä oleva neliöjuuri lavennetaan yleensä pois.
  - Määritelmä:
    - $\sqrt{a} \geq 0$
    - $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
  - Ominaisuuksia:
    - $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
    - $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
    - $\sqrt{a^2} = |a|$
    - $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b$
- **Sovelluksia**
  - Suoraan ja kääntäen verrannollisuus
  - Prosentti -laskut
- **Ensimmäisen asteen yhtälö**
  - Tosi / Epätosi yhtälö
  - Yhtälöpari
    - Yhteenlaskukeino
    - Sijoituskeino
  - Nimittäjät pois
  - Muuttujat vasemmalle, vakiot oikealle

MAA3
GEOMETRIA

3.1 Kaksi tetraedria ovat yhdenmuotoiset. Suuremman tilavuus on 1 litra ja pienemmän 2 dl. Mikä on tetraedrien mittakaava? Mikä on pinta-alojen suhde?

3.2 Kuinka korkealla lentokoneen on lennettävä, jotta lentokoneen kyydistä voitaisiin nähdä koko Suomi päästä päähän (1160 km)? Maapallon ympärysmitta on 40000 km.

3.3 Ympyrän neljännekseen piirretään sisäpuolelle mahdollisimman suuri neliö. Montako prosenttia neliön sivun pituus on ympyrän säteestä?

3.4 Kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 5 ja 8 sekä näiden sivujen välinen kulma 45°. Laske kolmion kolmannen sivun pituus, pinta-ala ja muiden kulmien suuruudet.

3.5 Kuution sisään laitetaan mahdollisimman suuri pallo. Kuinka monta prosenttia pallon tilavuus on kuution tilavuudesta? Kuinka monta prosenttia pallon pinta-ala on kuution pinta-alasta?

3.6 Umpinaisen ympyrälieriön sisään laitetaan mahdollisimman suuri pallo (pallo sivuaa lieriön vaippaa ja pohjia). Kuinka monta prosenttia pallon tilavuus on lieriön tilavuudesta? Kuinka monta prosenttia pallon pinta-ala on lieriön pinta-alasta?

3.7 Pallon sisään laitetaan mahdollisimman suuri kuutio. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on pallon tilavuudesta? Kuinka monta prosenttia kuution pinta-ala on pallon pinta-alasta?

3.8 Grillikota muodostuu kahdesta osasta. Alaosa on särmiö, jonka pohja on säännöllinen kuusikulmio. Alaosan pohjan pinta-ala on 9,3 m^2 ja alaosan korkeus 1,5 m. Yläosa on puolestaan pyramidi, jonka pohjana on myös sama säännöllinen kuusikulmio. Yläosan sivutahkon ja pohjatahkon välinen kulma on 40°. Laske grillikodan alaosan pohjan sivun pituus.

3.9 Laske edellisen tehtävän grillikodan tilavuus.

3.10 Kalajoki (N 64°, E 24°) ja Reykjavik (N 64°, W 22°) sijaitsevat samalla leveyspiirillä. Kuinka pitkä matka Kalajoelta on Reykjavikiin tätä leveyspiiriä pitkin? Maapallon ympärysmitta on 40000 km.

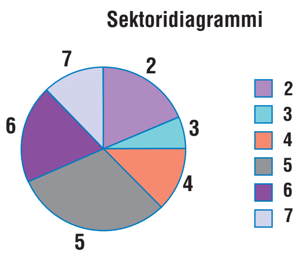
5.9 koordinaattimuoto $\begin{cases} x = 1 + r \\ y = -1 - 2r, r \in R, \\ z = -2 + 6r \end{cases}$

normaalimuoto $x - 1 = \dfrac{-y-1}{2} = \dfrac{x+2}{6}$

5.10 36,9° tai n. 37°

MAA6 TODENNÄKÖISYYS JA TILASTOT

6.1 $\overline{x} \approx 4{,}6$
$s \approx 1{,}6$



6.2 8,375 ≈ 8,4

6.3 rivejä n. $6{,}59 \cdot 10^{15}$, edustajistoja 105

6.4 $\dfrac{14}{45} \approx 31\%$

6.5 $\dfrac{1}{3}$

6.6 n. 26 %

6.7 n. 11,6 %

6.8 a) 91 %, b) 9,3 %, c) 0,4 %, d) 99,9 %

6.9 0,5 %

6.10 a) 29,7 %, b) 4,1 %

MAA7 DERIVAATTA

7.1 a) Funktion arvojoukko on täten $[-4, \infty[$
b) Funktion nollakohdat ovat $x = 1$ tai $x = -3$
c) funktion kuvaaja on negatiivinen, kun $-3 < x < 1$
d) pienin arvo on $f(-1) = -4$ suurinta arvoa funktiolla ei ole.
e) $f(5) = 32$

7.2 a) $x > -\dfrac{1}{2}$
b) i) $f(x)$ on kasvava funktio, kun $x > -1$
ii) $f(x)$ on aidosti vähenevä, kun $x < -1$

7.3 a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+1}{x^2-x} = \dfrac{x-2}{x^2-x}$ kun $x \neq 0$ ja 1
b) $x = -1$
c) $0 < x \leq 1$ ja $x \geq 2$

7.4 a) $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + x + 4) = -6$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + x^2 + 4}{x^2 + 2x} = -4$

7.5 a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - x + 4 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{3x^2 + x} = \dfrac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1} - x} = \infty$

7.6 Funktiolla ei ole raja-arvoa.

7.7 $a = -11$

7.8 a) $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{2}{10}x = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{5}x$

b) $f'(x) = (x^2 - 1)(15x^2 - 4x - 3)$

c) $f'(x) = \dfrac{-9x^2 + 4x - 3}{(x^2-1)^3}$, kun $x \neq \pm 1$

7.9 a) Huipun koordinaatti on (1,1)
b) Funktio on kasvava kun $f'(x) \geq 0$. $x \geq 1$
c) Tangentin yhtälö on $x - 8y + 139 = 0$

7.10 Suurin arvo on $f(4) = 36$. Pienin arvo on $f(2) = -16$.

MAA8 JUURI JA LOGARITMIFUNKTIOT

8.1 a) $(f \circ g)(3) = 6$ b) $(g \circ f)(3) = 1\frac{1}{2}$
c) $(g \circ f)(x) = \dfrac{2x}{2x-2}$, $x \neq 1$

8.2 a) $f'(x) = -6x(2 - x^2)^2$ $f'(\frac{1}{2}) = -\dfrac{147}{16}$

b) $f'(x) = \dfrac{48x^2}{(2-x)^4}$, $f'(-1) = \dfrac{16}{27}$

8.3 a) $f(x) = (2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = \dfrac{3}{2}(2-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -3 \cdot (2-x^2)^{\frac{1}{2}}$,
missä $2 - x^2 > 0$, josta $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
$f'(1) = -3$

b) $f(x) = (3 + 5x)^{\pi}$
$f'(x) = 5\pi(3+5x)^{\pi-1}$, kun $3 + 5x > 0$ eli
$x > -\dfrac{3}{5}$
$f'(\frac{2}{5}) = \pi \cdot 5^{\pi}$

8.4 a) $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
b) yhtälön juuret ovat $x = \pm 1$
c) epäyhtälön ratkaisu on $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
d) $f'(x) = \dfrac{-x}{2\sqrt[4]{(2-x^2)^3}}$, kun $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$f'(1) = -\dfrac{1}{2}$