Ratkaisuja

Ratkaisuja luvun 1 tehtäviin

1. Tehtävä 1, sivulta 14.

(a) Kirjoitetaan neliöjuuri murtopotenssina ja käytetään derivoimissääntöjä

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(-x^5 + 2\sqrt{x}\right) \\ &= \mathrm{D}\left(-x^5\right) + \mathrm{D}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= -5x^4 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= -5x^4 + \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

(b) Käytetään tulon derivoimissääntöä ja ketjusääntöä

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{2x+3}{3x+2}\right) \\ &= \mathrm{D}\left((2x+3)(3x+2)^{-1}\right) \\ &= \mathrm{D}(2x+3)(3x+2)^{-1} + (2x+3)\,\mathrm{D}(3x+2)^{-1} \\ &= 2(3x+2)^{-1} + (2x+3)(-1)(3x+2)^{-2}3 \\ &= \frac{2}{3x+2} - \frac{3(2x+3)}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{2(3x+2)}{(3x+2)^2} - \frac{3(2x+3)}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{6x+4-6x-9}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{-5}{(3x+2)^2}. \end{aligned}$$

(c) Käytetään ketjusääntöä

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{1}{(-x+3)^5}\right) \\ &= \mathrm{D}\left((-x+3)^{-5}\right) \\ &= -5(-x+3)^{-6}(-1) \\ &= \frac{5}{(-x+3)^6}. \end{aligned}$$

(d) Käytetään ketjusääntöä

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(\ln|-x^2|\right) \\ &= \frac{1}{-x^2}(-2x) \\ &= \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

2. Tehtävä 2, sivulta 14.

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(3x^2+2x+1\right) \\ &= \mathrm{D}(3x^2)+\mathrm{D}(2x)+\mathrm{D}(1) \\ &= 6x+2, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-3\right) \\ &= \mathrm{D}\left(\frac{1}{4}x^{-4}\right)+\mathrm{D}\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)-\mathrm{D}(3) \\ &= -4\cdot\frac{1}{4}x^{-5}+\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{x^5}+x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

(c) Käytetään tulon derivoimissääntöä ja ketjusääntöä

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(x\sin(3x)\right) \\ &= \mathrm{D}(x)\sin(3x)+x\,\mathrm{D}(\sin(3x)) \\ &= 1\sin(3x)+x\cos(3x)3 \\ &= \sin(3x)+3x\cos(3x). \end{aligned}$$

3. Tehtävä 3, sivulta 14-15. Käytetään derivaattojen määrittämiseen ketjusääntöä.

(a) Tehtävässä ulkofunktio on $f(x) = \sqrt{x}$ ja sisäfunktio on $g(x) = 2x + 1$, ulkofunktion ja sisäfunktion derivaatat ovat $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ja $g'(x) = 2$. Tällöin

$$\begin{aligned} D\left(f(x)\right) &= D\left(\sqrt{(}2x+1)\right) \\ &= D\left((2x+1)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \\ &= (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x+1}}. \end{aligned}$$

(b) Tehtävässä ulkofunktio on $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ ja sisäfunktio on $g(x) = 3 - 2x^2$, ulkofunktion ja sisäfunktion derivaatat ovat $f'(x) - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$ ja $g'(x) = -2 \cdot 2x$. Tällöin

$$\begin{aligned} D\left(f(x)\right) &= D\left((3-2x^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= -\frac{3}{2}(3-2x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2 \cdot 2x) \\ &= 6x(3-2x^2)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

(c) Tehtävässä ulkofunktio on $f(t) = \sqrt{t}$ ja sisäfunktio on $g(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$. Ulkofunktion derivaatta on $f'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$. Sisäfunktion derivaatta saadaan tulon derivoimissäännöllä

$$\begin{aligned} g'(x) &= D\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) \\ &= D\left((t^2+1)(t^2-1)^{-1}\right) \\ &= 2t(t^2-1)^{-1} + (-1)(t^2-1)^{-2}2t(t^2+1) \\ &= \frac{2t}{t^2-1} - \frac{2t(t^2+1)}{(t^2-1)^2} \\ &= \frac{2t(t^2-1)}{(t^2-1)^2} - \frac{2t^3+2t}{(t^2-1)^2} \\ &= \frac{2t^3-2t-2t^3-2t}{(t^2-1)^2} \\ &= \frac{-4t}{(t^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
D\left(f(x)\right) &= D\left(\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2-1}}\right) \\
&= D\left(\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2} \\
&= \frac{-2t}{\frac{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(t^2-1)^{\frac{1}{2}}}(t^2-1)^2} \\
&= \frac{-2t}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}(t^2-1)^{2-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{-2t}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

(d) Tehtävässä käytetään tulon derivoimissääntöä

$$\begin{aligned}
\phi'(u) &= \frac{d\phi}{du}\left(\frac{7+2u-3u^4}{\sqrt[3]{u^2}}\right) \\
&= \frac{d\phi}{du}\left[(7+2u-3u^4)u^{-\frac{2}{3}}\right] \\
&= (2-12u^3)u^{-\frac{2}{3}} + (7+2u-3u^4)\left(-\frac{2}{3}\right)u^{-\frac{5}{3}} \\
&= \frac{2-12u^3}{3u^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{7+2u-3u^4}{u^{\frac{5}{3}}} \\
&= \frac{3u(2-12u^3)}{u^{\frac{5}{3}}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{7+2u-3u^4}{u^{\frac{5}{3}}} \\
&= \frac{6u-36u^4-14-4u+6u^4}{3u^{\frac{5}{3}}} \\
&= \frac{2u-30u^4-14}{3\sqrt[3]{u^5}}.
\end{aligned}$$

4. Tehtävä 4, sivulta 15. Derivaatan määritelmä on $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Tällöin

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x + h \\ &= 2x, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-9} - \frac{x}{x-9}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-9} - \frac{x}{x-9}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x+h)(x-9)}{(x+h-9)(x-9)} - \frac{x(x+h-9)}{(x-9)(x+h-9)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - 9x + xh - 9h - x^2 - xh + 9x}{(x+h-9)(x-9)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-9h}{(x+h-9)(x-9)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-9}{(x+h-9)(x-9)} \\ &= \frac{-9}{(x-9)(x-9)} \\ &= \frac{-9}{(x-9)^2}. \end{aligned}$$

5. Tehtävä 5, sivulta 15. Merkitään alkuperäisen ympyrän alaa $A_0 = \pi r_0^2\ cm^2$. Ympyrän alan pienenemisnopeuden tiedetään olevan $2\pi \frac{cm^2}{s}$, joten ympyrän alan muutokselle saadaan yhtälö

$$A(t) = \pi r^2 = \pi r_0^2 - 2\pi t.$$

Ratkaistaan ensin ajanhetki, jolloin ympyrän ala on $75\pi\, cm^2$, olkoon tällöin $t = t_1$

$$A(t_1) = \pi r_0^2 - 2\pi t_1 = 75\pi,$$

josta saadaan

$$t_1 = \frac{r_0^2 - 75}{2}.$$

Seuraavaksi tarvitaan yhtälö säteen määrittämiseksi. Se saadaan ratkaisemalla säde r ympyrän alan yhtälöstä

$$\pi r^2 = \pi r_0^2 - 2\pi t,$$

jolloin

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2t}.$$

Säteen muutosnopeus saadaan nyt derivoimalla $r(t)$

$$\begin{aligned} r'(t) &= \frac{1}{2}\left(r_0^2 - 2t\right)^{-\frac{1}{2}}(-2) \\ &= -\left(r_0^2 - 2t\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{r_0^2 - 2t}} \end{aligned}$$

Säteen muutosnopeus ajanhetkellä t_1 on

$$\begin{aligned} r'(t_1) &= -\frac{1}{\sqrt{r_0^2 - 2t_1}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{r_0^2 - 2\frac{r_0^2 - 75}{2}}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{r_0^2 - r_0^2 + 75}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{75}}, \end{aligned}$$

joten säde pienenee nopeudella $\frac{1}{\sqrt{75}}$ ajanhetkellä, jolloin ympyrän ala on $75\pi\, cm^2$.

6. Tehtävä 6, sivulta 15. Yhdistetyn funktion derivaatta on ketjusäännön perusteella $f'(y) = h'(g(y))g'(y)$.

(a) Määritetään $f'(-1)$, kun $f(y) = h(g(y))$, $h(2) = 55$, $g(-1) = 2$, $h'(2) = -1$ ja $g'(-1) = 7$. Funktion derivaatta on $f'(y) = h'(g(y))g'(y)$.

Funktion $f(y)$ derivaatta kohdassa $y = -1$ on

$$\begin{aligned} f'(-1) &= h'(g(-1))g'(-1) \\ &= h'(2) \cdot 7 \\ &= -1 \cdot 7 \\ &= -7. \end{aligned}$$

(b) Määritetään $G'(1)$, kun $G(t) = f(h(t))$, $h(1) = 4$, $f'(4) = 3$ ja $h'(1) = 6$. Funktion derivaatta on $G'(t) = f'(h(t))h'(t)$.

Funktion $G(t)$ derivaatta kohdassa $t = 1$ on

$$\begin{aligned} G'(1) &= f'(h(1))h'(1) \\ &= f'(4) \cdot 6 \\ &= 3 \cdot 6 \\ &= 18. \end{aligned}$$

7. Tehtävä 7, sivulta 15.

8. Tehtävä 8, sivulta 16.

(a)

$$\begin{aligned} \int \big(3x^2 + 2x + 1\big)\,dx &= 3\int x^2\,dx + 2\int x\,dx + \int 1\,dx \\ &= 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x + C \\ &= x^3 + x^2 + x + C \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{3}{x^3} + 2x^{\frac{3}{2}} + 1\right) dx &= 3\int x^{-3}\,dx + 2\int x^{\frac{3}{2}}\,dx + \int 1\,dx \\ &= 3\frac{x^{-2}}{-2} + 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + x + C \\ &= -\frac{3}{2x^2} + 2\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C \\ &= -\frac{3}{2x^2} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{(x-10)^7}\right) dx &= \int \left((x-10)^{-7}\right) dx \\ &= \frac{(x-10)^{-6}}{-6} + C \\ &= -\frac{1}{6(x-10)^6} + C\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int \left(t^5 - \frac{5}{t^2}\right) dt &= \int t^5\,dt - 5\int t^{-2}\,dt \\ &= \frac{t^6}{6} - 5\frac{t^{-1}}{-1} + C \\ &= \frac{1}{6}t^6 + \frac{5}{t} + C\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\int (5\cos(10x) - 10\sin(5x))\,dx &= 5\int \cos(10x)\,dx - 10\int \sin(5x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int 10\cos(10x)\,dx + 2\int (-5\sin(5x))\,dx \\ &= \frac{1}{2}\sin(10x) + 2\cos(5x) + C\end{aligned}$$

9. Tehtävä 9, sivulta 17.

(a)

$$\int_{-1}^{3} dx = \Big/_{-1}^{3} x = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4,$$

(b)

$$\int_{-1}^{1} (y^5 - 1)dy = \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{6}y^6 - y = \frac{1}{6}\cdot 1^6 - 1 - \left(\frac{1}{6}\cdot(-1)^6 - (-1)\right) = \frac{1}{6} - 1 - \frac{1}{6} - 1 = -2,$$

(c)

$$\int_{0}^{\pi} \sin t\cos t\,dt = \Big/_{0}^{\pi} \sin^2 t = \sin^2\pi - \sin^2 0 = 0 - 0 = 0.$$

Tehtävä 10, sivulta 17.

10. Tehtävä 10, sivulta 17.

(a) Tiedetään, että $f'(x) = 2x + 1$, joten

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int 2x + 1\,dx = x^2 + x + C.$$

Ratkaistaan vakio C alkuehdon $f(0) = 3$ avulla

$$f(0) = 0^2 + 0 + C = C = 3.$$

Siis $f(x) = x^2 + x + 3$.

(b) Tiedetään, että $f'(x) = \sqrt{x+5} = (x+5)^{\frac{1}{2}}$, joten

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (x+5)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ratkaistaan vakio C alkuehdon $f(4) = -3$ avulla

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{2}{3}(4+5)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}(\sqrt{9})^3 + C \\ &= \frac{2}{3}3^3 + C \\ &= 18 + C = -3, \end{aligned}$$

joten $C = -3 - 18 = -21$. Siis $f(x) = \dfrac{2}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}} - 21$.

11. Tehtävä 11, sivulta 17. Koska kappaleen kiihtyvyys on $a(t)$, niin kappaleen nopeus saadaan
$v(t) = \int a(t)\,dt$ ja edelleen paikka $x(t) = \int v(t)\,dt$.

(a) Määritetään ensin kappaleen nopeus integroimalla kiihtyvyys

$$\begin{aligned} v(t) &= \int a(t)\,dt \\ &= \int (12t - 4)\,dt \\ &= 6t^2 - 4t + C. \end{aligned}$$

Tiedon $v(0) = -10$ perusteella saadaan selville vakio C

$$v(0) = 6 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + C = C = -10.$$

Kappaleen nopeus on siis $v(t) = 6t^2 - 4t - 10$. Integroimalla nopeus $v(t)$ saadaan kappaleen paikan funktio selville

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t)\,dt \\ &= \int (6t^2 - 4t - 10)\,dt \\ &= 2t^3 - 2t^2 - 10t + D. \end{aligned}$$

Määrätään vakio D tiedon $x(0) = 0$ perusteella

$$x(0) = 2 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 10 \cdot 0 + D = D = 0.$$

Paikan funktio on $x(t) = 2t^3 - 2t^2 - 10t$.

(b) Määritetään ensin kappaleen nopeus integroimalla kiihtyvyys

$$\begin{aligned} v(t) &= \int a(t)\,dt \\ &= \int (8\cos(2t))\,dt \\ &= 4\sin(2t) + C. \end{aligned}$$

Tiedon $v(0) = 4$ perusteella saadaan selville vakio C

$$v(0) = 4\sin(2 \cdot 0) + C = 4 \cdot \sin 0 + C = 4 \cdot 0 + C = C = 4.$$

Kappaleen nopeus on siis $v(t) = 4\sin(2t) + 4$. Integroimalla nopeus $v(t)$ saadaan kappaleen paikan funktio selville

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t)\,dt \\ &= \int (4\sin(2t) + 4)\,dt \\ &= -2\cos(2t) + 4t + D. \end{aligned}$$

Määrätään vakio D tiedon $x(0) = -2$ perusteella

$$x(0) = -2\cos(2 \cdot 0) + 4 \cdot 0 + D = -2\cos 0 + 4 \cdot 0 + D = -2 \cdot 1 + D = -2 + D = -2,$$

joten $D = 0$. Paikan funktio on $x(t) = -2\cos(2t) + 4t$.

12. Tehtävä 12, sivulta 17.

(a)

$$\begin{aligned}
\int (3x-5)^{17}\,dx &= \frac{1}{3}\int 3(3x-5)^{17}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\frac{(3x-5)^{18}}{18} + C \\
&= \frac{1}{54}(3x-5)^{18} + C
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x^2+9}\,dx &= \int x(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int 2x(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \cos(kt)\,dt &= \frac{1}{k}\int k\cos(kt)\,dt \\
&= \frac{1}{k}\sin(kt) + C
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int x\sin(2x^2)\,dt &= \frac{1}{4}\int 4x\sin(2x^2)\,dt \\
&= \frac{1}{4}\big(-\cos(2x^2)\big) + C \\
&= -\frac{1}{4}\cos(2x^2) + C
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\int (1-\cos x)^5 \sin x\,dt &= \frac{(1-\cos x)^6}{6} + C \\
&= \frac{1}{6}(1-\cos x)^6 + C
\end{aligned}$$

13. Tehtävä 13, sivulta 21. Differentiaaliyhtälön ratkaisu toteuttaa yhtälön

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -6t$$

ja yhtälön

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int -6t\,dt,$$

joten

$$\ln x(t) = -3t^2 + C.$$

Tästä saadaan logaritmin määritelmän perusteella

$$x(t) = \mathrm{e}^{-3t^2+C} = \mathrm{e}^{-3t^2}\mathrm{e}^{C} = C'\mathrm{e}^{-3t^2},$$

missä $C' = \mathrm{e}^C$.

14. Tehtävä 14, sivulta 21. Differentiaaliyhtälön ratkaisu toteuttaa yhtälön

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = 4t - 1,$$

joten se toteuttaa myös yhtälön

$$\int \frac{x'}{x}\,dx = \int 4t - 1\,dt,$$

josta saadaan

$$\ln|x| = 2t^2 - t + C.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{2t^2-t+C} \\ &= \mathrm{e}^{2t^2-t}\mathrm{e}^{C} \\ &= C_1\mathrm{e}^{2t^2-t}, \end{aligned}$$

missä $C_1 = \mathrm{e}^C$.

15. Tehtävä 15, sivulta 21. Differentiaaliyhtälön ratkaisu toteuttaa yhtälön

$$x'(t) = 6\,t(x(t) - 1)^{\frac{2}{3}},$$

jota muokkaamalla saadaan

$$\frac{x'(t)}{(x(t) - 1)^{\frac{2}{3}}} = 6\,t.$$

Tällöin ratkaisu saadaan intergoimalla

$$\int \frac{x'(t)}{(x(t)-1)^{\frac{2}{3}}}\,dt = \int 6\,t\,dt$$

eli

$$\int x'(t)(x(t)-1)^{-\frac{2}{3}}\,dt = \int 6\,t\,dt,$$

josta saadaan

$$3(x(t)-1)^{\frac{1}{3}} = 3t^2 + C.$$

Tätä muokkaamalla ratkaisuksi saadaan

$$x(t) = (t^2 + C')^3 + 1.$$

16. Tehtävä 16, sivulta 21. Differentiaaliyhtälön ratkaisu toteuttaa yhtälön

$$x' = 2\sqrt{x(t)+2},$$

joten se toteuttaa myös yhtälö

$$\frac{x'}{\sqrt{x(t)+2}} = 2.$$

Tällöin ratkaisu saadaan integroimalla puolittain

$$\int \frac{x'}{\sqrt{x(t)+2}}\,dt = \int 2dt, \int x'(x(t)+2)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \int 2dt,$$

josta saadaan

$$(x(t)+2)^{\frac{1}{2}} = 2t + C.$$

Tällöin differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$\begin{aligned} x(t)+2 &= (2t+C)^2, \\ x(t) &= 4t^2 + 4Ct + C^2 - 2. \end{aligned}$$

17. Tehtävä 17, sivulta 21. Differentiaaliyhtälön ratkaisu toteuttaa yhtälön

$$x'(t) = (tx(t))^{\frac{3}{2}},$$

joten se toteuttaa myös yhtälöt

$$\begin{aligned} x'(t) &= t^{\frac{3}{2}}x(t)^{\frac{3}{2}}, \\ \frac{x'(t)}{x(t)^{\frac{3}{2}}} &= t^{\frac{3}{2}}, \\ x'(t)x(t)^{-\frac{3}{2}} &= t^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Tällöin ratkaisu saadaan integroimalla

$$\int x'(t)x(t)^{-\frac{3}{2}}\,dt = \int t^{\frac{3}{2}}\,dt,$$

josta saadaan

$$\begin{aligned} -2x(t)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C, \\ \frac{1}{\sqrt{x(t)}} &= -\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + C, \\ x(t) &= \left(\frac{1}{-\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + C}\right)^2. \end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$x(t) = \frac{1}{\left(-\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + C\right)^2}.$$

18. Tehtävä 18, sivulta 21. Differentiaaliyhtälön ratkaisu toteuttaa yhtälön

$$x'(t)(t^2+3) = 2tx(t),$$

joten se toteuttaa myös yhtälön

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{2t}{t^2+3}.$$

Puolittain integroimalla saadaan

$$\begin{aligned} \int \frac{x'(t)}{x(t)}dt &= \int \frac{2t}{t^2+3}dt, \\ \ln|x(t)| &= \ln|t^2+3| + C, \end{aligned}$$

jolloin differentiaaliyhtälön ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{\ln|t^2+3|+C} \\ &= \mathrm{e}^{\ln|t^2+3|}\mathrm{e}^{C} \\ &= C_1t^2 + 3C_1, \end{aligned}$$

missä $C_1 = \mathrm{e}^C$.

19. Tehtävä 19, sivulta 21. Tarkistetaan, että funktio $x(t) = Ce^t$ on differentiaaliyhtälön $x'(t) = x(t)$ ratkaisu. Derivoidaan funktio $x(t)$ muuttujan t suhteen

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}Ce^t = Ce^t.$$

Huomataan, että $x'(t) = x(t)$.

20. Tehtävä 20, sivulta 21. Tarkistetaan, että funktio $x(t) = Ce^{kt}$ on differentiaaliyhtälön $x'(t) = x(t)$ ratkaisu. Derivoidaan funktio $x(t)$ muuttujan t suhteen

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}Ce^{kt} = kCe^t.$$

Huomataan, että $x'(t) = kx(t)$.

21. Tehtävä 21, sivulta 28. Alkuarvo-ongelman

$$\frac{kx'(t)}{kx(t)+m} = k,\ x(0) = x_0\ (> 0)$$

(a) ratkaisu kaavalla $\int g(x(t))x'(t)\,dt = \int h(t)\,dt$. Etsitään ensin differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

$$\begin{aligned}
\int \frac{kx'(t)}{kx(t)+m}\,dt &= \int k\,dt \\
\ln|kx(t)+m| &= kt + C \\
kx(t)+m &= e^{kt+C} \\
x(t) &= \frac{e^{kt}e^C - m}{k} \\
x(t) &= \frac{C'}{k}e^{kt} - \frac{m}{k}.
\end{aligned}$$

Alkuehdon toteuttava ratkaisu

$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{C'}{k}e^{k\cdot 0} - \frac{m}{k} \\
&= \frac{C'}{k}e^{\cdot 0} - \frac{m}{k} \\
&= \frac{C'}{k} - \frac{m}{k} = x_0,
\end{aligned}$$

joten $C' = \frac{1}{k}(x_0 + \frac{m}{k}) = \frac{x_0}{k} + \frac{m}{k^2}$ ja alkuarvo-ongelman ratkaisu siis on

$$x(t) = \frac{\frac{x_0}{k} + \frac{m}{k^2}}{k}e^{kt} - \frac{m}{k} = \left(x_0 + \frac{m}{k}\right)e^{kt} - \frac{m}{k}$$

(b) ratkaistaan kaavalla $\int g(x)\,dx = \int h(t)\,dt$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{kx'}{kx+m}\,dx &= \int k\,dt \\
\ln|kx+m| &= kt + C \\
kx+m &= \mathrm{e}^{kt+C} \\
x &= \frac{\mathrm{e}^{kt}\mathrm{e}^{C} - m}{k} \\
x &= \frac{C'}{k}\mathrm{e}^{kt} - \frac{m}{k}
\end{aligned}$$

Alkuehdon toteuttava ratkaisu

$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{C'}{k}\mathrm{e}^{k\cdot 0} - \frac{m}{k} \\
&= \frac{C'}{k}\mathrm{e}^{\cdot 0} - \frac{m}{k} \\
&= \frac{C'}{k} - \frac{m}{k} = x_0,
\end{aligned}$$

joten $C' = \frac{1}{k}(x_0 + \frac{m}{k}) = \frac{x_0}{k} + \frac{m}{k^2}$ ja alkuarvo-ongelman ratkaisu siis on

$$x(t) = \frac{\frac{x_0}{k} + \frac{m}{k^2}}{k}\mathrm{e}^{kt} - \frac{m}{k} = \left(x_0 + \frac{m}{k}\right)\mathrm{e}^{kt} - \frac{m}{k}$$

(c) ratkaistaan kaavalla $\int_{x_0}^{x} g(v)\,dv = \int_{t_0}^{t} h(u)\,du$.

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{kx'}{kx+m}\,dx &= \int_{0}^{t} k\,dt \\
\ln|kx+m| - \ln|kx_0+m| &= kt - k\cdot 0 \\
\ln\left|\frac{kx+m}{kx_0+m}\right| &= kt \\
\frac{kx+m}{kx_0+m} &= \mathrm{e}^{kt} \\
kx+m &= (kx_0+m)\mathrm{e}^{kt} \\
kx &= (kx_0+m)\mathrm{e}^{kt} - m \\
x &= (x_0 + \frac{m}{k})\mathrm{e}^{kt} - \frac{m}{k}
\end{aligned}$$

22. Tehtävä 22, sivulta 28. Ratkaistaan tehtävä käyttämällä kaavaa $x(t) = \mathrm{e}^{-A(t)} \int f(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt$. Differentiaaliyhtälölle

$$x'(t) + x(t) = 2$$

$A(t) = \int a(t)dt = \int dt = t$ ja $f(t) = 2$, joten differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-t} \int 2\mathrm{e}^{t}dt \\ &= \mathrm{e}^{-t}\left(2\mathrm{e}^{t} + C\right) \\ &= 2\mathrm{e}^{t+(-t)} + C\mathrm{e}^{-t} \\ &= 2\mathrm{e}^{0} + C\mathrm{e}^{-t} \\ &= 2 + C\mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

Etsitään vakio C, joka toteuttaa alkuehdon

$$x(0) = 2 + C\mathrm{e}^{0} = 2 + C = 2,$$

joten $C = 0$. Tällöin alkuarvo-ongelman ratkaisu on

$$x(t) = 2.$$

23. Tehtävä 23, sivulta 29. Ratkaistaan tehtävä käyttämällä kaavaa $x(t) = \mathrm{e}^{-A(t)} \int f(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt$. Differentiaaliyhtälölle

$$\begin{aligned} tx'(t) + 2x(t) &= 3t \\ x'(t) + \frac{2}{t}x(t) &= 3 \end{aligned}$$

$A(t) = \int a(t)dt = \int \frac{2}{t}dt = 2\ln|t|$ ja $f(t) = 3$, joten differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-2\ln|t|} \int 3\mathrm{e}^{2\ln|t|}dt \\ &= \mathrm{e}^{\ln|t^{-2}|} \int 3\mathrm{e}^{ln|t^{2}|}dt \\ &= t^{-2} \int 3t^{2}dt \\ &= t^{-2}(t^{3} + C) \\ &= t + Ct^{-2} \end{aligned}$$

Etsitään vakio C, joka toteuttaa alkuehdon

$$x(1) = t + C \cdot 1^{-2} = 1 + C = 5,$$

joten $C = 4$. Tällöin alkuarvo-ongelman ratkaisu on

$$x(t) = t + 4t^{-2}.$$

24. Tehtävä 24, sivulta 29. Ratkaistaan tehtävä käyttämällä kaavaa $x(t) = \mathrm{e}^{-A(t)} \int f(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt$. Differentiaaliyhtälölle

$$\begin{aligned} tx'(t) - x(t) &= t \\ x'(t) - \frac{1}{t}x(t) &= 1 \end{aligned}$$

$A(t) = \int a(t)dt = \int -\frac{1}{t}dt = -\ln|t|$ ja $f(t) = 1$, joten differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{\ln|t|} \int 1 \cdot \mathrm{e}^{-\ln|t|}dt \\ &= t \int \mathrm{e}^{ln|t^{-1}|}dt \\ &= t \int \frac{1}{t}dt \\ &= t(\ln|t| + C) \\ &= t\ln|t| + Ct. \end{aligned}$$

Etsitään vakio C, joka toteuttaa alkuehdon

$$x(1) = 1\ln|1| + C\dot{1} = 0 + C = C = 7,$$

Tällöin alkuarvo-ongelman ratkaisu on

$$x(t) = t\ln|t| + 7t.$$

25. Tehtävä 25, sivulta 31.

26. Tehtävä 26, sivulta 31.

27. Tehtävä 27, sivulta 32. Etsitään differentiaaliyhtälön ratkaisu

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{-q+bx}{x} \cdot \frac{y}{p-ay} \\
\frac{p-ay}{y} dy &= \frac{-q+bx}{x} dx \\
\int \frac{p-ay}{y} dy &= \int \frac{-q+bx}{x} dx \\
\int \frac{p}{y} - a\, dy &= \int -\frac{q}{x} + b\, dx \\
p \ln|y| - ay &= -q \ln|x| + bx + C \\
p \ln|y| + q \ln|x| &= bx + ay + C_1 \\
\ln|y^p| + \ln|x^q| &= bx + ay + C_1 \\
\ln|y^p x^q| &= bx + ay + C_1 \\
y^p x^q &= \mathrm{e}^{bx+ay+C_1} \\
y^p x^q &= \mathrm{e}^{bx}\mathrm{e}^{ay}\mathrm{e}^{C_1} \\
y^p x^q &= C\mathrm{e}^{bx}\mathrm{e}^{ay},
\end{aligned}$$

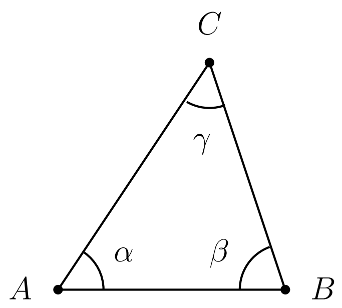
missä $C = \mathrm{e}^{C_1}$. Näin ollen differentiaaliyhtälön ratkaisu toteuttaa yhtälön $y^p x^q = C\mathrm{e}^{bx}\mathrm{e}^{ay}$

Ratkaisuja luvun 2 tehtäviin

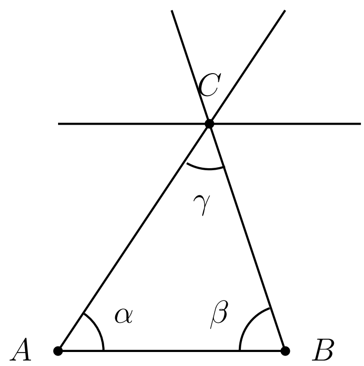
28. Tehtävä 28, sivulta 39. Piirretään ensin piste P keskipisteenä ympyrän kaaret suoralle l. Sitten piirretään suoran ja ympyränkaarien leikkauspisteet keskipisteinä ympyrän kaaret suoran sille puolle, jossa piste P ei sijaitse. Yhdistetään piste P ja ympyrän kaarien leikkauspisteet.

29. Tehtävä 29, sivulta 39. Piirretään ensin pisteen P kautta suoran l leikkaava mielivaltainen suora s. Piirretään sitten suorien leikkauspiste keskipisteenä ympyrän kaari, joka leikkaa molemmat suorat. Merkitään näin muodostuneen sektorin keskuskulmaa α. Piirretään samalla säteellä ympyrän kaari piste P keskipisteenä. Valitaan tämän jälkeen säteeksi ensimmäisen ympyrän kaaren ja suoran s leikkauspiste ja piirretään jälimmäisen ympyrän kaaren ja suoran s leikkauspiste keskipisteenä ympyrän kaaren leikkaava kaari. Yhdistetään näin saatu kaarten leikkauspiste ja piste P viivaimen avulla.

30. Tehtävä 30, sivulta 39. Olkoon kolmion kulmat α, β ja γ kuvan mukaisesti.

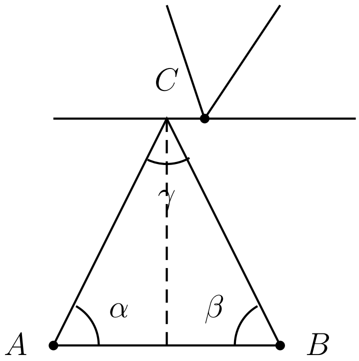


Piirretään pisteen C kautta kolmion sivun AB kanssa yhdensuuntainen suora ja jatketaan kolmion sivuja AC ja BC.



Samanpaikkaset ja ristikkäiset kulmat tiedetään yhtä suuriksi ja oikokulma tunnetaan, joten $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

31. Tehtävä 31, sivulta 39. Piirretään tasakylkisen kolmion kärjen C kautta kannalle AB normaali.



32. Tehtävä 32, sivulta 44. Väitteitä ovat (a), (c), (d), (e)
Väitteitä eivät ole (b), (f), (g)

33. Tehtävä 33, sivulta 44. P="reaaliluku x on (aidosti) suurempi kuin 1" = "$x > 1$"
Q="reaaliluvun x neliö on (aidosti) suurempi kuin 1" = "$x^2 > 1$"
$\neg P$="reaaliluku x ei ole (aidosti) suurempi kuin 1"
="reaaliluku x on yhtä suuri tai pienempi kuin 1" = "$x \leq 1$"
$\neg Q$="reaaliluvun x neliö ei ole (aidosti) suurempi kuin 1"
="reaaliluvun x neliö on yhtä suuri tai pienempi kuin 1" = "$x^2 \leq 1$"

(a) Oletus on P ja johtopäätös on Q. Väite $P \Rightarrow Q$ on tosi.

(b) Oletus on Q ja johtopäätös on P. Väite $Q \Rightarrow P$ on epätosi, sillä esimerkiksi jos $x = -2$, niin $4 > 1$, mutta $x < 1$.

(c) Oletus on $\neg P$ ja johtopäätös on $\neg Q$. Väite $\neg P \Rightarrow \neg Q$ on epätosi, sillä esimerkiksi $-2 < 1$, mutta $(-2)^2 = 4 > 1$.

(d) Oletus on Q ja johtopäätös on $\neg P$. Väite $Q \Rightarrow \neg P$ on epätosi, sillä esimerkiksi jos $x = 2$, niin $4 > 1$, mutta $x > 1$.

34. Tehtävä 34, sivulta 45.

35. Tehtävä 35, sivulta 45. Tosia väitteitä ovat (c), (d), (e), (g), (i)
Epätosia väitteitä ovat (a),(b),(f),(h), (j)

36. Tehtävä 36, sivulta 58. Todistuksessa on osoitettava oikeaksi kaksi väitettä:

1. jos n on parillinen, niin n^2 on parillinen,

2. jos n^2 on parillinen, niin n on parillinen.

Osoitetaan ensin väite 1. Oletetaan, että n on parillinen, jolloin se voidaan esittää $n = 2k$, $k \in \mathbb{R}$. Tällöin $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2m^2)$, joten n^2 on parillinen.

Väite 2 osoitetaan vastaoletuksen avulla. Tehdään vastaoletus, että n on pariton. Luku n voidaan nyt esittää muodossa $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{R}$. Tällöin $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$, joka on ristiriidassa oletuksen n^2 on parillinen kanssa. Siis alkuperäinen väite on tosi.

Koska väitteet 1. ja 2. ovat tosia, niin tehtävän väite on tosi.

37. Tehtävä 37, sivulta 58. Todistuksessa on osoitettava oikeaksi kaksi väitettä:

1. jos n on pariton, niin n^2 on pariton,
2. jos n^2 on pariton, niin n on pariton.

Osoitetaan ensin väite 1. Oletetaan, että n on pariton. Tällöin se voidaan esittää muodossa $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{R}$, jolloin

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

joten n^2 on pariton. Väite 1 on siis tosi.

Todistetaan väite 2 vastaoletuksella. Tehdään vastaoletus, että n on parillinen. Tällöin se voidaan esittää muodossa $n = 2k,\ k \in \mathbb{R}$, jolloin

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Siis alkuperäinen väite on tosi.

Koska väitteet 1. ja 2. ovat tosia, niin tehtävän väite on tosi.

38. Tehtävä 38, sivulta 58.

(a) Tehdään vastaoletus, että $\sqrt{3}$ on rationaalinen. Tällöin se voidaan esittää murtolukumuodossa $\sqrt{3} = \dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, jossa lukujen m ja n suurin yhteinen tekijä on 1. Neliöjuuren määritelmän perusteella saadaan $3 = \dfrac{m^2}{n^2}$ ja edelleen $3n^2 = m^2$.

Jos n on pariton, niin n^2 on pariton, jolloin myös m^2 on pariton. Jos n on parillinen, niin n^2 on parillinen, jolloin m^2 on parillinen. Koska lukujen n^2 ja m^2 parillisuuden vuoksi myös n ja m olisivat parillisia, niin tällöin luvuilla n ja m olisi yhteisenä tekijänä 2, joka on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Keskitytään siis tapaukseen n ja m ovat parittomia. Tällöin n esittää muodossa $n = 2k + 1$, $k\mathbb{R}$ ja m muodossa $m = 2l + 1$, jolloin

$$\begin{aligned}
& 3(2k+1)^2 = (2l+1)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 3(4k^2+4k+1) = 4l^2+4l+1 \\
\Leftrightarrow\ & 12k^2+12k+3 = 4l^2+4l+1 \\
\Leftrightarrow\ & 12k^2+12k+2 = 4l^2+4l \\
\Leftrightarrow\ & 6k^2+6k+1 = 2l^2+2l \\
\Leftrightarrow\ & 2(3k^2+3k)+1 = 2(l^2+l).
\end{aligned}$$

Vasen puoli on nyt pariton ja oikea puoli parillinen. Tehty vastaoletus ei siis tuota ratkaisua, joten lukua $\sqrt{3}$ ei voida esittää murtolukumuodossa. Siis alkuperäinen väite on tosi eli $\sqrt{3}$ on irrationaalinen.

(b)

39. Tehtävä 39, sivulta 58. Tehdään vastaoletus, että rationaaliluvun x ja irrationaaliluvun y summa $x + y$ on rationaalinen. Koska x on rationaalinen, voidaan se esittää muodossa $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ ja summa voidaan esittää muodossa $x + y = \dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{b} + y = \frac{m}{n} \\
\Leftrightarrow\ & an + bny = bm \\
\Leftrightarrow\ & bny = bm - an \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{bm - an}{bn},
\end{aligned}$$

joka väittää luvun y olevan rationaalinen. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten tehty vastaoletus on epätosi ja alkuperäinen väite on tosi.

40. Tehtävä 40, sivulta 58.

(a) Tehdään vastaoletus, että $\sqrt[3]{x}$ on rationaalinen. Tällöin se voidaan esittää muodossa $\sqrt[3]{x} = \dfrac{m}{n}$, missä m ja n ovat keskenään jaottomia eli niiden suurin yhteinen tekijä on 1, lisäksi $n \neq 0$ ja $m, n \in \mathbb{Z}$.

Kuutiojuuren määritelmän mukaan saadaan $x = \dfrac{m^3}{n^3}$. Koska m ja n ovat kokonaislukuja, niin myös niiden kuutiot ovat kokonaislukuja. Näin ollen päädytään ristiriitaan, sillä oletuksen mukaan x on irrationaalinen. Siis vastaoletus on epätosi ja alkuperäinen väite on tosi.

(b) Olkoon $x = \sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ irrationaaliluku). Tällöin $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, mikä on ristiriidassa väitteen kanssa. Alkuperäinen väite on siis epätosi.

41. Tehtävä 41, sivulta 58.

42. Tehtävä 42, sivulta 59. Sievennetään lauseketta sivun 50 esimerkin kaavojen avulla

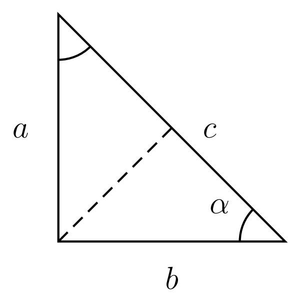
$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\left(\cos\beta-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}\right)} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha}+\sin\beta}{\cos\beta-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha}+\sin\beta}{\cos\beta\left(1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\
&= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\left(1+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\
&= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.
\end{aligned}
$$

43. Tehtävä 43, sivulta 59. Käytetään kosinin, sinin ja tangentin yhteenlaskukaavoja

$$
\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha+\alpha) \\
&= \sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha \\
&= 2\cos\alpha\sin\alpha, \\
\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha) \\
&= \cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha \\
&= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \\
\tan(2\alpha) &= \tan(\alpha+\alpha) \\
&= \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} \\
&= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.
\end{aligned}
$$

44. Tehtävä 44, sivulta 59. Tarkastellaan suorakulmaisen kolmion



kulmaa α. Ison kolmion perusteella

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

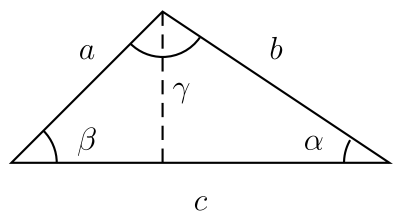
ja korkeuden rajaaman pienemmän kolmion perusteella

$$\sin\alpha = \frac{h}{b}.$$

Näiden perusteella $b = c\cos\alpha$ ja $h = b\sin\alpha$, joten

$$\begin{aligned} h &= b\sin\alpha \\ &= c\cos\alpha\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}2c\cos\alpha\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}c2\cos\alpha\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}c\sin(2\alpha). \end{aligned}$$

45. Tehtävä 45, sivulta 59. Tarkastellaan kuvan kolmiota.



Kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2}ch$. Kuvan perusteella

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{h}{a}, \\ \sin\alpha &= \frac{h}{b}, \end{aligned}$$

joista voidaan ratkaista h

$$\begin{aligned} h &= a\sin\beta, \\ h &= b\sin\alpha. \end{aligned}$$

Valitaan $h = b\sin\alpha$ ja sijoitetaan se kolmion alan kaavaan

$$A = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}cb\sin\alpha.$$

Sinilauseen perusteella

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c},$$

josta saadaan ratkaistua b

$$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Sijoitetaan saatu lauseke kolmion alan kaavaan

$$A = \frac{1}{2}cb\sin\alpha = \frac{1}{2}c\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}\sin\alpha = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

46. Tehtävä 46, sivulta 59. Tehtävässä ehdollisen lauseen oletus on

$$x, y \in \mathbb{Z} \text{ ja } x > 0,\ y > 0$$

ja väite

$$x^2 - y^2 \neq 1.$$

Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut x ja y, joilla

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Tällöin yhtälö voidaan muuttaa muotoon

$$(x + y)(x - y) = 1.$$

Tämän tulon tekijöitä voivat olla vain

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases},$$

sillä oletuksen mukaan x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja. Tästä saadaan puolittain yhteen laskemalla ja ratkaisemalla x ja y

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases},$$

mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa, sillä aluksi oletettiin, että $y > 0$. Siis tehty vastaoletus on epätosi ja alkuperäinen väite on tosi.

47. Tehtävä 47, sivulta 59. Olkoot f ja g parittomia funktioita. Siis

$$f(-x) = -f(x),\ g(-x) = -g(x).$$

Muodostetaan näistä murtofunktio

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Tutkitaan, mitä on $h(-x)$

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{f(-x)}{g(-x)} \\ &= \frac{-f(x)}{-g(x)} \\ &= \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Siis kahden parittoman funktion murtofunktio on parillinen.

48. Tehtävä 48, sivulta 59.

49. Tehtävä 49, sivulta 70.
$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$A \backslash C = \{1, 2, 4\}$
$B \cap D = \{-1, 0, 2, 3\}$
$B \cup C = \{-1, 0, 2, 3, 5, 7\}$, joten $(B \cup C) \cap A = \{2, 3, 5\}$.

50. Tehtävä 50, sivulta 70. Kirjoitetaan joukot ensin siten, että jokainen alkio esiintyy niissä vain kerran

$$A = \{0, 1, 2\},\ B = \{1, 2, 4, 5, 7\},\ C = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Tällöin
$A \cap B = \{1, 2\}$,
$A \cup C = \{0, 1, 2, 3\}$,
$B \cap C = \{1, 2\}$, joten $A \times B \cap C = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$,
$C \backslash B = \{0, 3\}$.

51. Tehtävä 51, sivulta 70.
$A \cap D = A \cap \emptyset = \emptyset$,
$A \cup D = A = \{-2, -1, 0, 1\}$,
$B \cap C = \emptyset$,
$E = \{(1, -2), (1, 0), (2, -2), (2, 0), (3, -2), (3, 0)\}$.

52. Tehtävä 52, sivulta 70. Näytetään oikeaksi osittelulaki

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Osoitetaan väitteet

1. jos $x \in A \cup (B \cap C)$, niin $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. jos $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, niin $x \in A \cup (B \cap C)$.

Väitteen 1 todistamiseksi olkoon $x \in A \cup (B \cap C)$. Tällöin $x \in A$ tai $x \in B \cap C$. Leikkauksen määritelmän perusteella $x \in B$ ja $x \in C$, joten $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$. Leikkauksen määritelmän nojalla $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Väitteen 2 todistamiseksi olkoon $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Tällöin leikkauksen määritelmän nojalla $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$. Unionin määritelmästä päätellään, että $x \in A$ tai $x \in B$ ja $x \in C$ eli $x \in A$ tai $x \in B \cap C$. Tällöin union määritelmän perusteella $x \in A \cup (B \cap C)$.

53. Tehtävä 53, sivulta 70. Näytetään oikeaksi De Morganin laki

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Osoitetaan väitteet

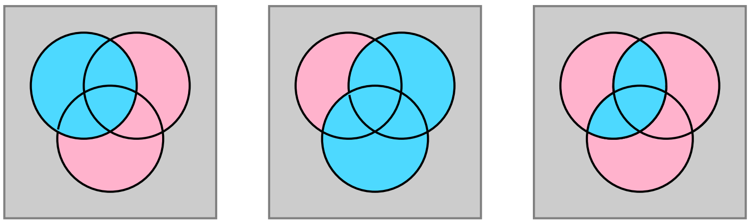
1. jos $x \in A \setminus (B \cap C)$, niin $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

2. jos $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, niin $x \in A \setminus (B \cap C)$.

Väitteen 1 todistamiseksi olkoon $x \in A \setminus (B \cap C)$. Tällöin $x \in A$ ja $x \notin (B \cup C)$. Koska $x \notin (B \cap C)$, niin leikkauksen määritelmän perusteella $x \notin B$ tai $x \notin C$. Koska $x \in A$, niin $x \in A \setminus B$ tai $x \in A \setminus C$. Union määritelmän nojalla $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

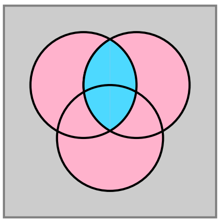
Väitteen 2 todistamiseksi olkoon $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Tällöin unionin määritelmän perusteella $x \notin B$ tai $x \notin C$. Komplementin määritelmän avulla päätellään, että $x \in A$ ja $x \notin B$ tai $x \notin C$. Siis $x \in A$, mutta $x \notin B \cap C$. Tällöin komplementin määritelmän nojalla $x \in A \setminus (B \cap C)$.

54. Tehtävä 54, sivulta 71. Tarkistetaan osittelulakien oikeellisuus Venn-diagrammien avulla. Aloitetaan ensimmäisen lain vasemmasta puolesta. Piirretään siis ensin omiin kuviinsa joukot A ja $B \cup C$, joista otettu leikkaus on viimeisessä kuvassa.

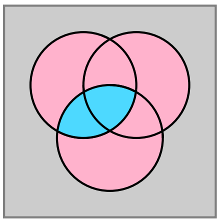


A $\qquad$ $B \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C)$

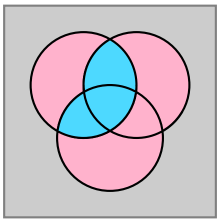
Tehdään samoin lain oikealle puolelle. Ensin piirretään omiin kuviinsa joukot $A \cap B$ ja $A \cap C$, mutta yhdistetään joukot nyt viimeiseen kuvaan unionilla.



$A \cap B$



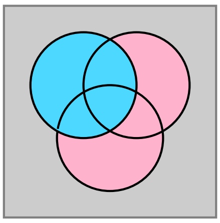
$A \cap C$



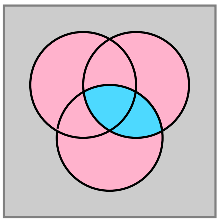
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Vertaamalla kummankin kuvasarjan viimeisiä kuvia huomataan, että kyseessä ovat samat joukot ja siis ensimmäinen osittelulaki pätee.

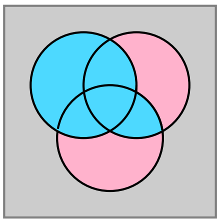
Tarkastellaan kuvien avulla myös toinen osittelulaki. Lähdetään taas liikkeelle lain vasemmalta puolelta piirtämällä omiin kuviinsa joukot A ja $B \cap C$. Liitetään unionilla joukot yhteen viimeiseen kuvaan.



A

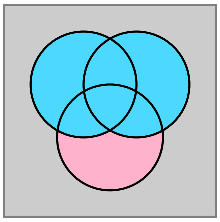


$B \cap C$

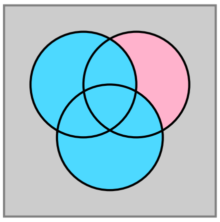


$A \cup (B \cap C)$

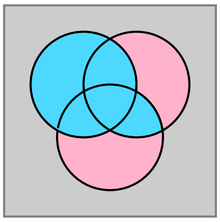
Otetaan sitten käsittelyyn toisen lain oikea puoli. Piirretään ensin omiin kuviinsa joukot $A \cup B$ ja $A \cup C$ ja otetaan niistä leikkaus.



$A \cup B$



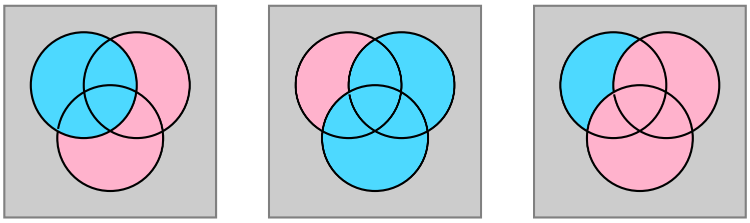
$A \cup C$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

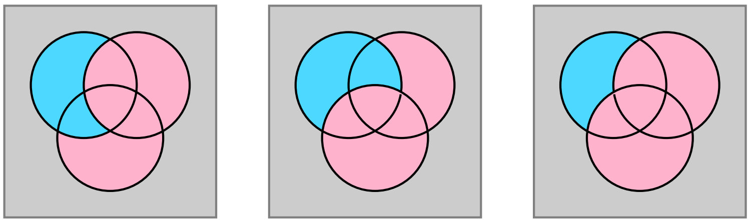
Jälleen havaitaan, että kumpaakin lain puolta esittävät kuvat yhtenevät viimeisten kuvien osalta, joten jälkimmäinenkin laki siis pätee.

55. Tehtävä 55, sivulta 71. Tutkitaan Venn-diagrammien avulla DeMorganin lakien oikeellisuus. Aloitetaan jälleen ensimmäisen lain vasemmasta puolesta vastaavasti kuin Osittelulain yhteydessä. Ensin piirretään siis omiin kuviinsa joukot A ja $B \cup C$, joista saadaan lopullinen joukko ottamalla joukon $B \cup C$ komplementti joukossa A.



A $\qquad$ $B \cup C$ $\qquad$ $A \setminus (B \cup C)$

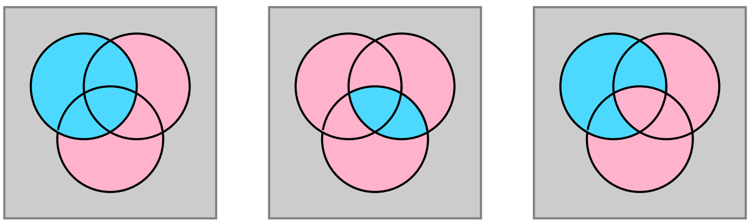
Tutkitaan myös lain oikea puoli siten, että ensin piirretään kuvat joukkojen B ja C komplementeista joukossa A ja otetaan näistä joukoista sitten leikkaus.



$A \setminus B$ $\qquad$ $A \setminus C$ $\qquad$ $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

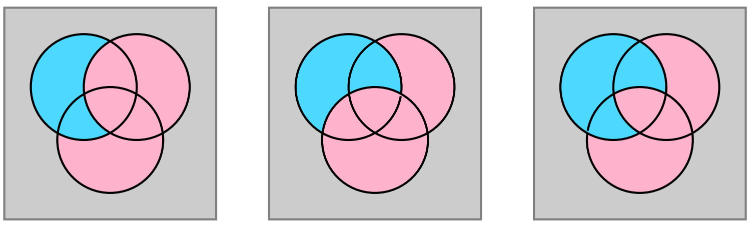
Havaitaan, että viimeiset kuvat vastaavat toisiaan, joten ensimmäinen DeMorganin laki pätee näiden kuvien perusteella.

Jatketaan toisen DeMorganin lain tarkastelulla. Piirretään nyt joukot A ja $B \cap C$ omiin kuviinsa ja sitten otetaan joukon $B \cap C$ komplementti joukossa A.



A $\qquad$ $B \cap C$ $\qquad$ $A \setminus (B \cap C)$

Oikean puolen tarkasteluun tarvitaan kuvat joukoista $A \setminus B$ ja $A \setminus C$, joiden unioni on viimeisessä kuvassa.



$A \setminus B$ $\qquad$ $A \setminus C$ $\qquad$ $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Siis toinenkin De Morganin laki pätee kuvien perusteella.

56. Tehtävä 56, sivulta 71.

(a) $\{x|x = 2y + 1,\ y \in \mathbb{Z}\}$,

(b) $\{x|x = 6y,\ y \in \mathbb{Z}\}$,

(c) $\{x \in \mathbb{R}|x \geq 0\}$.

57. Tehtävä 57, sivulta 71. Joukot ovat

(a) negatiiviset reaaliluvut,

(b) luvulla 3 jaolliset luonnolliset luvut,

(c) ehdon $|2x - 3| \leq 4$ täyttävät kokonaisluvut eli luvut 0, 1, 2 ja 3.

58. Tehtävä 58, sivulta 71. Tehtävän väitteen todistamiseksi on osoitettava kaksi väitettä

1. jos $A \subset B$, niin $A \cup B = B$,

2. jos $A \cup B = B$, niin $A \subset B$.

Väitteen 1 todistamiseksi olkoon $A \subset B$. Jos $x \in A$, niin myös $x \in B$, jolloin unionin määritelmän ja oletuksen perusteella $A \cup B = B$. Jos $x \in B$, mutta $x \notin A$, niin unionin määritelmän perusteella $A \cup B = B$.

Väitteen 2 todistamiseksi olkoon $A \cup B = B$. Unionin määritelmän perusteella $x \in A$ tai $x \in B$. Yhtä suuruuden vuoksi päätellään, että $A \subset B$.

59. Tehtävä 59, sivulta 71. Tehtävän väitteen todistamiseksi on osoitettava kaksi väitettä

1. jos $A \subset B$, niin $A \cap B = A$,

2. jos $A \cap B = A$, niin $A \subset B$.

Väitteen 1 todistamiseksi olkoon $A \subset B$. Tällöin jos $x \in A$, niin myös $x \in B$. Koska $x \in A$ ja $x \in B$, niin $x \in A \cap B$. Leikkauksen määritelmän perusteella $A \cap B = A$.

Väitteen 2 todistamiseksi olkoon $A \cap B = A$. Jos $x \in A \cap B$, niin leikkauksen määritelmän perusteella $x \in A$ ja $x \in B$. Tällöin oletuksesta päätellään, että $A \subset B$.

60. Tehtävä 60, sivulta 71. Olkoon $A \subset B \subset E$. Osoitetaan, että tällöin $E \backslash B \subset E \backslash A$.

Olkoon $x \in E \backslash B$. Tällöin joukkojen komplementin määritelmän perusteella $x \in E \wedge x \notin B$. Koska $A \subset B$, niin tiedetään, että $x \in E \wedge x \notin A$. Tästä komplementin määritelmän perusteella päätellään $x \in E \backslash A$, joten väite on tosi.

Lyhyesti

$$x \in E \backslash B \Rightarrow x \in E \wedge x \notin B \Rightarrow x \in E \wedge x \notin A \Rightarrow x \in E \backslash A.$$

Siis $E \backslash B \subset E \backslash A$.

61. Tehtävä 61, sivulta 71. (a)

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap (C \cup E \setminus W)) &= A \cup ((B \cap C) \cup (B \cap E \setminus W)) \\ &= A \cup ((B \cap C) \cup \emptyset) \\ &= A \cup B = B. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (E \setminus X \cup Y) \cap (X \cup E \setminus Y) &= ((E \setminus X \cup Y) \cap X) \cup ((E \setminus X \cup Y) \cap E \setminus Y) \\ &= (E \setminus X \cap X) \cup (Y \cap X) \cup ((E \setminus X \cap E \setminus Y) \cup (Y \cap E \setminus Y) \\ &= \emptyset \cup (Y \cap X) \cup (E \setminus X \cap E \setminus Y) \cup \emptyset \\ &= (Y \cap X) \cup (E \setminus (X \cup Y)). \end{aligned}$$

62. Tehtävä 62, sivulta 77. Todistetaan väite induktiolla.

Alkuaskel (MI1) pätee, sillä kun $n = 1$

$$f'(x) = (-1)^{\frac{1+1}{2}} \sin x = (-1)^1 \sin x = -\sin x.$$

Tehdään seuraavaksi oletus, että k on pariton luonnollinen luku. Tällöin induktio-oletus on

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \sin x.$$

Tarkastellaan sitten väitettä, kun $n = k + 1$ ja käytetään induktio-oletusta

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\left(f^{(k)}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left((-1)^{\frac{k+1}{2}} \sin x\right) \\ &= (-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos x, \end{aligned}$$

joten induktioaskel (MI2) täyttyy tässä tapauksessa. Tehdään vastaava tarkastelu oletuksella, että k on parillinen luonnollinen luku. Tällöin induktio-oletus on

$$f^{(k)} = (-1)^{\frac{n}{2}} \cos x.$$

Tarkastellaan väitettä, kun $n = k + 1$ ja käytetään induktio-oletusta

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)} &= \frac{d}{dx}\left(f^{(k)}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left((-1)^{\frac{k}{2}} \cos x\right) \\
&= (-1)^{\frac{k}{2}}(-\sin x) \\
&= (-1)^{\frac{k}{2}}(-1)\sin x \\
&= (-1)^{\frac{k}{2}+1}\sin x \\
&= (-1)^{\frac{k}{2}+\frac{2}{2}}\sin x \\
&= (-1)^{\frac{k+2}{2}}\sin x \\
&= (-1)^{\frac{(k+1)+1}{2}}\sin x,
\end{aligned}$$

joten induktioaskel (MI2) on voimassa molemmissa tapauksissa. Induktioperiaatteen nojalla väite on tosi.

63. Tehtävä 63, sivulta 77. Todistetaan väite $(ab)^n = a^n b^n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ induktiolla.

Alkuaskel (MI1) täyttyy, sillä kun $n = 1$

$$(ab)^1 = ab = a^1 b^1.$$

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$. Tällöin induktio-oletus on

$$(ab)^k = a^k b^k.$$

Tarkastellaan väitettä, kun $n = k + 1$. Käytetään induktio-oletusta, jolloin

$$\begin{aligned}
(ab)^{k+1} &= (ab)^k(ab) \\
&= a^k b^k ab \\
&= a^k a b^k b \\
&= a^{k+1} b^{k+1},
\end{aligned}$$

joten myös induktioaskel (MI2) on voimassa. Koska kohdat (MI1) ja (MI2) täyttyvät, niin induktioperiaatteen nojalla väite on voimassa jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

64. Tehtävä 64, sivulta 77. Todistetaan väite induktiolla.
Alkuaskel (MI1) on voimassa, sillä

$$5^{2-1} + 1 = 5 + 1 = 6.$$

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$ eli induktio oletus on

$$5^{2n-1} + 1 = 6t, t \in \mathbb{Z}.$$

Tarkastellaan väitettä, kun $n = k + 1$. Tällöin induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$\begin{aligned} 5^{2(k+1)-1} + 1 &= 5^{2(k+1)-1} + 1 \\ &= 5^{2k+2-1} + 1 \\ &= 5^{(2k-1)+2} + 1 \\ &= 5^{2k-1}5^2 + 1 \\ &= 25 \cdot 5^{2k-1} + 1 \\ &= 24 \cdot 5^{2k-1} + 5^{2k-1} + 1, \end{aligned}$$

koska 24 on jaollinen luvulla 6 ja induktio-oletuksen mukaan $5^{2k-1} + 1$ on jaollinen luvulla 6, niin näiden summasta voidaan ottaa luku 6 yhteiseksi tekijäksi. Näin ollen induktioaskel (MI2) on voimassa.

Koska alkuaskel (MI1) ja induktioaskel (MI2) ovat voimassa, niin induktioperiaatteen nojalla väite on voimassa jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

65. Tehtävä 65, sivulta 77. Alkuaskel on voimassa, sillä kun $n = 2$

$$2^3 - 2 = 8 - 2 = 6 = 3 \cdot 2,$$

joten $2^3 - 2$ on jaollinen luvulla 3.

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$ eli induktio-oletus on

$$k^3 - k = 3t,\ t \in \mathbb{Z}.$$

Tarkastellaan väitettä, kun $n = k + 1$

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= k^3 - k + 3(k^2 + k). \end{aligned}$$

Induktio-oletuksen perusteella $k^3 - k$ on jaollinen luvulla 3 ja summan jälkimmäisestä termistä $3(k^2 + k)$ nähdään, että sekin on jaollinen luvulla 3. Näin ollen induktioaskel (MI2) on voimassa.

Koska alkuaskel (MI1) ja induktioaskel (MI2) ovat voimassa, niin induktioperiaatteen nojalla väite on tosi jokaisella $n \geq 2$.

66. Tehtävä 66, sivulta 77. Alkuaskel on voimassa, sillä kun $n = 3$

$$\begin{aligned} & 3^2 > 2 \cdot 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 9 > 6. \end{aligned}$$

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$. Tällöin induktio-oletus on

$$k^2 > 2k.$$

Tarkastellaan väitettä, kun $n = k + 1$ ja käytetään induktio-oletusta

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 2k + 1 > 2k + 2 = 2(k+1).$$

Induktioaskel (MI2) on myös voimassa, joten induktioperiaatteen nojalla väite on tosi jokaisella $n \geq 3$.

67. Tehtävä 67, sivulta 77. Osoitetaan väite induktiolla. Alkuaskel on voimassa, sillä

$$\sum_{j=1}^{1} 2^{j-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1 = 2^1 - 1.$$

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$, jolloin induktio-oletus on

$$\sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} = 2^k - 1.$$

Tarkastellaan väitettä, kun $n = k+1$. Induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} 2^{j-1} &= 2^{k+1-1} + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} \\ &= 2^{k+1-1} + 2^k - 1 \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1, \end{aligned}$$

joten induktioaskel (MI2) on voimassa. Koska kohdat (MI1) ja (MI2) täyttyvät, on väite induktioperiaatteen nojalla voimassa kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

68. Tehtävä 68, sivulta 77. Alkuaskel (MI1) on voimassa, sillä

$$\sum_{j=1}^{1} j^3 = 1^3 = 1 \text{ ja } \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$. Tällöin induktio-oletus on

$$\sum_{j=1}^{k} j^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Tarkastellaan väitettä, kun $n = k+1$. Induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j^3 &= (k+1)^3 + \sum_{j=1}^{k} j^3 \\
&= (k+1)^3 + \frac{k^2(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{4(k+1)^3 + k^2(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(4(k+1)+k^2)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Täten myös induktioaskel (MI2) on voimassa. Koska kohdat (MI1) ja (MI2) täyttyvät, niin induktioperiaatteen nojalla väite on voimassa jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

69. Tehtävä 69, sivulta 77. Alkuaskel (MI1) on voimassa, sillä kun $n = 1$

$$2 \cdot 1 = 2 = (1+1)1.$$

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$. Tällöin induktio-oletus on

$$\sum_{i=1}^{k} 2i = (k+1)k.$$

Tarkastellaan väitettä, kun $n = k+1$. Induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} 2i &= (k+1)k + 2(k+1) \\
&= (k+2)(k+1) \\
&= ((k+1)+1)(k+1).
\end{aligned}$$

Täten myös induktioaskel (MI2) on voimassa. Koska kohdat (MI1) ja (MI2) täyttyvät, niin induktioperiaatteen nojalla väite on voimassa jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

70. Tehtävä 70, sivulta 78. Alkuaskel (MI1) on voimassa, sillä kun $n = 1$

$$2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2.$$

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$. Tällöin induktio-oletus on

$$\sum_{i=1}^{k} (2i - 1) = k^2.$$

Tarkastellaan väitettä, kun $n = k + 1$. Induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) &= k^2 + (2(k + 1) - 1) \\
&= k^2 + 2k + 2 - 1 \\
&= k^2 + 2k + 1 \\
&= (k + 1)^2.
\end{aligned}$$

Täten myös induktioaskel (MI2) on voimassa. Koska kohdat (MI1) ja (MI2) täyttyvät, niin induktioperiaatteen nojalla väite on voimassa jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

71. Tehtävä 71, sivulta 78. Alkuaskel (MI1) on voimassa, sillä kun $n = 1$

$$ar^{1-1} = a = \frac{a(1 - r^1)}{1 - r}.$$

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$. Tällöin induktio-oletus on

$$\sum_{i=1}^{k} ar^{i-1} = \frac{a(1 - r^k)}{1 - r}.$$

Tarkastellaan väitettä, kun $n = k + 1$. Induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} ar^{i-1} &= \frac{a(1-r^k)}{1-r} + ar^{k+1-1} \\
&= \frac{a(1-r^k)}{1-r} + \frac{(1-r)ar^k}{1-r} \\
&= \frac{a(1-r^k) + ar^k - rar^k}{1-r} \\
&= \frac{a - ar^k + ar^k - ar^{k+1}}{1-r} \\
&= \frac{a - ar^{k+1}}{1-r} \\
&= \frac{a\left(1 - r^{k+1}\right)}{1-r}.
\end{aligned}$$

Täten myös induktioaskel (MI2) on voimassa. Koska kohdat (MI1) ja (MI2) täyttyvät, niin induktioperiaatteen nojalla väite on voimassa jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

72. Tehtävä 72, sivulta 78. Alkuaskel (MI1) on voimassa, sillä kun $n = 1$

$$a_1 = 1\frac{a_1 + a_1}{2} = \frac{2a_1}{2}.$$

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$. Induktio-oletus on tällöin

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = k\frac{a_1 + a_k}{2}.$$

Lisätään induktio-oletuksen kummallekin puolelle $a_k + 1$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} = k\frac{a_1 + a_k}{2} + a_{k+1} \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{k+1} a_i = k\frac{a_1 + a_k}{2} + \frac{2a_{k+1}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{k+1} a_i = \frac{ka_1 + ka_k + 2a_{k+1}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{k+1} a_i = \frac{ka_1 + ka_k + 2a_{k+1}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{k+1} a_i = \frac{ka_1 + a_1 - a_1 + ka_k + 2a_{k+1} + ka_{k+1} - ka_{k+1}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{k+1} a_i = \frac{(k+1)a_1 + (k+1)a_{k+1}}{2} + \frac{-a_1 + ka_k + a_{k+1} - ka_{k+1}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{k+1} a_i = (k+1)\frac{a_1 + a_{k+1}}{2} + \frac{-a_1 + a_{k+1} - k(a_{k+1} - a_k)}{2}.
\end{aligned}
$$

Koska kyseessä on aritmeettinen summa, tiedetään, että $a_{k+1} - a_k = d$, missä d on vakio. Tällöin saadaan

$$
\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= d, \\
a_3 - a_1 &= 2d, \\
a_4 - a_1 &= 3d, \\
&\vdots \\
a_{k+1} - a_1 &= kd.
\end{aligned}
$$

Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k+1} a_i = (k+1)\frac{a_1 + a_{k+1}}{2} + \frac{-a_1 + a_{k+1} - k(a_{k+1} - a_k)}{2}. \\
\Leftrightarrow\ &\sum_{i=1}^{k+1} a_i = (k+1)\frac{a_1 + a_{k+1}}{2} + \frac{kd - kd}{2}. \\
\Leftrightarrow\ &\sum_{i=1}^{k+1} a_i = (k+1)\frac{a_1 + a_{k+1}}{2},
\end{aligned}$$

joten induktioaskel (MI2) on voimassa. Induktioperiaatteen nojalla väite on voimassa.

73. Tehtävä 73, sivulta 78. Alkuaskel (MI1) on voimassa, sillä 1-alkioisella joukolla $\{a_1\}$ on kaksi osajoukkoa $\emptyset$ ja $\{a_1\}$.

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$, jolloin induktio-oletuksena on, että k-alkioisella joukolla $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ on 2^k osajoukkoa.

Joukosta $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$, jossa on $k + 1$ alkiota voidaan muodostaa osajoukot $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ja $\{a_{k+1}\}$. Jokaisesta joukon $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ osajoukosta voidaan muodostaa kaksi joukon $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ osajoukkoa, toiseen joukkoon kuuluu muiden alkioiden lisäksi alkio a_{k+1} ja toiseen ei. Koska induktio-oletuksen perusteella joukolla $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ on 2^k osajoukkoa, niin joukolla $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ on $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ osajoukkoa, joten induktioaskel (MI2) on voimassa. Induktioperiaatteen nojalla väite on voimassa.

74. Tehtävä 74, sivulta 78. Alkuaskel (MI1) on voimassa, sillä kun $n = 1$, niin $x - y = x - y$.

Olkoon väite voimassa, kun $n = k_1$. Tällöin induktio-oletuksena on, että

$$x^{k_1} - y^{k_1} = (x - y)\sum_{k=0}^{k_1 - 1} x^k y^{k_1 - 1 - k}.$$

75. Tehtävä 75, sivulta 81. Olkoon joukot A ja B äärellisiä. Tällöin niissä on äärellinen määrä alkioita. Merkitään joukkojen alkioiden lukumääriä $\#A = n$ ja $\#B = m$. Joukoissa A ja B voi olla samoja alkioita, jotka siis kuuluvat näiden joukkojen leikkaukseen $A \cap B$. Merkitään näiden alkioiden lukumäärää $\#(A \cap B) = k$.

Joukossa A on $n - k$ alkiota, jotka eivät ole yhteisiä joukon B alkioiden kanssa. Vastaavasti joukossa B on $m - k$ alkiota, jotka eivät ole yhteisiä joukon A alkioiden kanssa. Joukkojen alkiot voidaan laskea yhteen

$$\#A + \#B = (n-k) + k + (m-k) + k = (n-k) + (m-k) + 2k.$$

Huomataan, että yhteiset alkiot lasketaan tällöin kahdesti. Unionissa alkioiden moninkertoja ei kuitenkaan lasketa, joten saadusta alkioiden summasta on vähennettävä kerran yhteisten alkioiden lukumäärä. Joukon $A \cup B$ alkioiden lukumäärä on siis

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

76. Tehtävä 76, sivulta 81.

77. Tehtävä 77, sivulta 82.

78. Tehtävä 78, sivulta 82.

79. Tehtävä 79, sivulta 82.

80. Tehtävä 80, sivulta 82.

81. Tehtävä 81, sivulta 82.

82. Tehtävä 82, sivulta 82.

Ratkaisuja luvun 3 tehtäviin

83. Tehtävä 83, sivulta 89.

84. Tehtävä 84, sivulta 89.

85. Tehtävä 85, sivulta 89.

86. Tehtävä 86, sivulta 90.

87. Tehtävä 87, sivulta 91.

88. Tehtävä 88, sivulta 92.

89. Tehtävä 89, sivulta 92.

90. Tehtävä 90, sivulta 92.

91. Tehtävä 91, sivulta 92.

92. Tehtävä 92, sivulta 100.

93. Tehtävä 93, sivulta 100. Tulo on reaalinen, jos sen imaginaariosa on 0. Lasketaan tulo zw

$$\begin{aligned} zw &= (1 - 2\,\mathrm{i})(1 + 2\,\mathrm{i}) \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2\,\mathrm{i} - 2\,\mathrm{i} \cdot 1 - 2\,\mathrm{i} \cdot 2\,\mathrm{i} \\ &= 1 + 2\,\mathrm{i} - 2\,\mathrm{i} - (2\,\mathrm{i})^2 \\ &= 1 - 4(-1) \\ &= 1 + 4 = 5. \end{aligned}$$

Tulon zw imganaariosa on 0, joten tulo on reaalinen.

94. Tehtävä 94, sivulta 100.

$$\begin{aligned}
z^{-1} &= \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{3-\mathrm{i}} \\
&= \frac{3+\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} \\
&= \frac{3+\mathrm{i}}{3^2-\mathrm{i}^2} \\
&= \frac{3+\mathrm{i}}{9+1} \\
&= \frac{3+\mathrm{i}}{10} \\
&= \frac{3}{10}+\frac{1}{10}\,\mathrm{i}, \\
w^{-1} &= \frac{1}{w} \\
&= \frac{1}{-2+2\,\mathrm{i}} \\
&= \frac{-2-2\,\mathrm{i}}{(-2+2\,\mathrm{i})(-2-2\,\mathrm{i})} \\
&= \frac{-2-2\,\mathrm{i}}{4-4\,\mathrm{i}^2} \\
&= \frac{-2-2\,\mathrm{i}}{4+4} \\
&= \frac{-2-2\,\mathrm{i}}{8} \\
&= -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\,\mathrm{i}, \\
\frac{z}{w} &= z\frac{1}{w} \\
&= (3-\mathrm{i})\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\,\mathrm{i}\right) \\
&= -\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\,\mathrm{i}+\frac{1}{4}\,\mathrm{i}+\frac{1}{4}\,\mathrm{i}^2 \\
&= -\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{i} \\
&= -1-\frac{1}{2}\,\mathrm{i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{w}{z} &= w\frac{1}{z} \\
&= (-2+2\,\mathrm{i})\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\,\mathrm{i}\right) \\
&= -\frac{6}{10}-\frac{2}{10}\,\mathrm{i}+\frac{6}{10}\,\mathrm{i}+\frac{2}{10}\,\mathrm{i}^2 \\
&= -\frac{6}{10}-\frac{2}{10}+\left(-\frac{2}{10}+\frac{6}{10}\right)\mathrm{i} \\
&= -\frac{8}{10}+\frac{4}{10}\,\mathrm{i} = -\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\,\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

95. Tehtävä 95, sivulta 100.

$$\begin{aligned}
a)z^2 &= (1-\mathrm{i})^2 \\
&= 1^2 - 2\cdot 1\cdot \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 \\
&= 1 - 2\,\mathrm{i} - 1 = -2\,\mathrm{i}, \\
b)\frac{1}{z} &= \frac{1}{1-\mathrm{i}} \\
&= \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} \\
&= \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i}^2)} \\
&= \frac{1+\mathrm{i}}{(1+1)} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

96. Tehtävä 96, sivulta 100. Sijoitetaan yhtälöön juuri $1+\mathrm{i}$

$$(1+\mathrm{i})^2 - 2(1+\mathrm{i}) + 2 = 1 + 2\,\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 - 2 - 2\,\mathrm{i} + 2 = 1 - 1 - 2 + 2 = 0$$

ja juuri $1-\mathrm{i}$

$$(1-\mathrm{i})^2 - 2(1-\mathrm{i}) + 2 = 1 - 2\,\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 - 2 + 2\,\mathrm{i} + 2 = 1 - 1 - 2 + 2 = 0.$$

Siis $1+\mathrm{i}$ ja $1-\mathrm{i}$ ovat yhtälön $x^2 - 2x + 2 = 0$ juuret.

97. Tehtävä 97, sivulta 100.

$$
\begin{aligned}
a)\ z_1 z_2 &= (2+3\,\mathrm{i})(-2+\mathrm{i}) \\
&= -4+2\,\mathrm{i} - 6\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i}^2 \\
&= -4-3-4\,\mathrm{i} = -7-4\,\mathrm{i}, \\
b)\ |z_1| &= \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}, \\
c)\ \frac{z_2}{z_1} &= \frac{-2+\mathrm{i}}{2+3\,\mathrm{i}} \\
&= \frac{(-2+\mathrm{i})(2-3\,\mathrm{i})}{(2+3\,\mathrm{i})(2-3\,\mathrm{i})} \\
&= \frac{-4+6\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{i}+3}{2^2-3^2\,\mathrm{i}^2} \\
&= \frac{-1+8\,\mathrm{i}}{13} \\
&= -\frac{1}{13}+\frac{8}{13}.
\end{aligned}
$$

98. Tehtävä 98, sivulta 100.

$$
\begin{aligned}
& z-\mathrm{i} = -2z+3+\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\ & z+2z = 3+\mathrm{i}+\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\ & 3z = 3+2\,\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\ & z = \frac{3}{3}+\frac{2\,\mathrm{i}}{3} \\
\Leftrightarrow\ & z = 1+\frac{2}{3}\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

99. Tehtävä 99, sivulta 102. Olkoon $z = -1-\mathrm{i}$ ja $w = x+y\,\mathrm{i}$. Ratkaistaan yhtälöstä $zw = 2$ luku w

$$\begin{aligned}
zw &= 2 \\
\Leftrightarrow w &= \frac{2}{z} \\
\Leftrightarrow w &= \frac{2}{-1-\mathrm{i}} \\
\Leftrightarrow w &= \frac{2(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})} \\
\Leftrightarrow w &= \frac{-2+2\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^2} \\
\Leftrightarrow w &= \frac{-2+2\,\mathrm{i}}{1+1} \\
\Leftrightarrow w &= \frac{-2+2\,\mathrm{i}}{2} \\
\Leftrightarrow w &= -1+1\,\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

100. Tehtävä 100, sivulta 102.

$$\begin{aligned}
& 2z - 5\,\mathrm{i} = (2+\mathrm{i})z - 3 \\
\Leftrightarrow\ & 2z - 5\,\mathrm{i} = 2z + \mathrm{i}\,z - 3 \\
\Leftrightarrow\ & 2z - 2z - \mathrm{i}\,z = -3 + 5\,\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\ & -\mathrm{i}\,z = -3 + 5\,\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\ & z = \frac{-3+5\,\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} \\
\Leftrightarrow\ & z = \frac{(-3+5\,\mathrm{i})(\mathrm{i})}{(-\mathrm{i})\,\mathrm{i}} \\
\Leftrightarrow\ & z = \frac{-3\,\mathrm{i}+5\,\mathrm{i}^2}{-\mathrm{i}^2} \\
\Leftrightarrow\ & z = \frac{-5-3\,\mathrm{i}}{1} = -5-3\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

101. Tehtävä 101, sivulta 102.

102. Tehtävä 102, sivulta 102.

103. Tehtävä 103, sivulta 102.

104. Tehtävä 104, sivulta 102.

105. Tehtävä 105, sivulta 102.

106. Tehtävä 106, sivulta 104. $\overline{1-2\,\mathrm{i}} = 1+2\,\mathrm{i}$,
$\overline{-4+\mathrm{i}} = -4-\mathrm{i}$,
$\overline{-\sqrt{5}-3\,\mathrm{i}} = -\sqrt{5}+3\,\mathrm{i}$,
$\overline{-2-2\,\mathrm{i}} = -2+2\,\mathrm{i}$,
$\overline{2+6\,\mathrm{i}} = 2-6\,\mathrm{i}$.

107. Tehtävä 107, sivulta 104. Olkoon $z = x + y\,\mathrm{i}$

$$
\begin{aligned}
& 2\overline{z} = z - 1 + \mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\quad & 2\overline{z} - z = -1 + \mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\quad & 2(x - y\,\mathrm{i}) - (x + y\,\mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\quad & 2x - 2y\,\mathrm{i} - x - y\,\mathrm{i} = -1 + \mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\quad & x - 3y\,\mathrm{i} = -1 + \mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\quad & x = -1 \text{ ja } -3y = 1 \quad \text{(verrataan kompelksilukujen reaali- ja imaginaariosia)} \\
\Leftrightarrow\quad & x = -1 \text{ ja } y = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

108. Tehtävä 108, sivulta 104. Olkoon $x + y\,\mathrm{i}$

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{i}\,z - (2\overline{z} - 1) = 2\,\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{i}\,z - 2\overline{z} + 1 = 2\,\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{i}\,z - 2\overline{z} = -1 + 2\,\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{i}(x + y\,\mathrm{i}) - 2(x - y\,\mathrm{i}) = -1 + 2\,\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{i}\,x + y\,\mathrm{i}^2 - 2x + 2y\,\mathrm{i} = -1 + 2\,\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\quad & -2x - y + (x + 2y)\,\mathrm{i} = -1 + 2\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Muodostetaan reaali- ja imaginaariosia vertaamalla yhtälöpari

$$
\begin{cases} -2x - y &= -1 \quad |\cdot 2 \\ x + 2y &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y &= -2 \\ x + 2y &= 2 \end{cases}.
$$

Laskemalla jälkimmäinen puolittain yhteen saadaan

$$-3x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Sijoittamalla $x = 0$ jompaan kumpaan yhtälöön saadaan $y = 1$. Siis $z = \mathrm{i}$.

109. Tehtävä 109, sivulta 104. Kompleksiluku $z \neq 0$, tapauksessa $z = 0$

yhtälö ei ole määritelty.

$$
\begin{aligned}
&\frac{z-1}{z} = 2-\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow\quad & z-1 = (2-\mathrm{i})z \\
\Leftrightarrow\quad & z-1 = 2z-\mathrm{i}\,z \\
\Leftrightarrow\quad & z-2z+\mathrm{i}\,z = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & z(1-2+\mathrm{i}) = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & z(-1+\mathrm{i}) = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & z = \frac{1}{-1+\mathrm{i}} = \frac{-1-\mathrm{i}}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})} = \frac{-1-\mathrm{i}}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

110. Tehtävä 110, sivulta 104.

111. Tehtävä 111, sivulta 104. Väitteen osoittamiseksi on näytettävä oikeaksi kaksi väitettä:

1. jos z on puhtaasti imaginaarinen, niin $\overline{z} = -z$,
2. jos kompleksiluvulle z on voimassa $\overline{z} = -z$, niin z on puhtaasti imaginaarinen.

Todistetaan ensin väite 1. Olkoon z puhtaasti imaginaarinen. Tällöin $z = y\,\mathrm{i}$ ja $\overline{z} = \overline{y\,\mathrm{i}} = -y\,\mathrm{i} = -z$.

Todistetaan väite 2. Olkoon kompleksiluvulle $z = x+y\,\mathrm{i}$ voimassa $\overline{z} = -z$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
&\overline{z} = -z \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{x+y\,\mathrm{i}} = -(x+y\,\mathrm{i}) \\
\Leftrightarrow\quad & x-y\,\mathrm{i} = -x-y\,\mathrm{i}\,.
\end{aligned}
$$

Tarkastellaan puolittain reaali- ja imaginaariosia, jolloin saadaan

$$x = -x \quad \text{ja} \quad y = y.$$

Nämä toteutuvat vain siinä tapauksessa, että $x = 0$ ja $y = y$ eli $z = y\,\mathrm{i}$. Siis kompleksiluvun z on oltava puhtaasti imaginaarinen.

Koska väitteet 1 ja 2 ovat tosia, on alkuperäinen väite tosi.

112. Tehtävä 112, sivulta 105.

113. Tehtävä 113, sivulta 105. Osoitetaan: $\overline{\overline{z}} = z$. Olkoon $z = x+y\,\mathrm{i}$. Tällöin

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x+y\,\mathrm{i}}} = \overline{x-y\,\mathrm{i}} = x+y\,\mathrm{i} = z.$$

114. Tehtävä 114, sivulta 105.

115. Tehtävä 115, sivulta 105.

116. Tehtävä 116, sivulta 105.

117. Tehtävä 117, sivulta 119. Kompleksiluvun $z_1 = -1+\mathrm{i}$ eksponenttimuoto

$$\begin{aligned} r_1 &= |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\ \arg(z_1) &= \tan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}, \\ z_1 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}, \end{aligned}$$

Kompleksiluvun $z_2 = 6\,\mathrm{i}$ eksponenttimuoto

$$\begin{aligned} r_2 &= |z_2| = \sqrt{6^2} = 6, \\ \arg(z_2) &= \frac{\pi}{2}, \\ z_2 &= 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}, \end{aligned}$$

Kompleksiluvun $z_3 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ eksponenttimuoto

$$\begin{aligned} r_3 &= |z_3| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2, \\ \arg(z_3) &= \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}, \\ z_3 &= 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}, \end{aligned}$$

118. Tehtävä 118, sivulta 119. Kompleksiluvun $z_1 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$ eksponenttimuoto

$$\begin{aligned} r_1 &= |z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2, \\ \arg(z_1) &= \tan\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) = -\frac{5\pi}{6}, \\ z_1 &= 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}}, \end{aligned}$$

Kompleksiluvun $z_2 = -4$ eksponenttimuoto

$$\begin{aligned} r_2 &= |z_2| = \sqrt{(-4)^2} = 4, \\ \arg(z_2) &= \pi, \\ z_2 &= 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}, \end{aligned}$$

Kompleksiluvun $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ eksponenttimuoto

$$\begin{aligned}
r_1 &= |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \\
\arg(z_1) &= \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}, \\
z_1 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}},
\end{aligned}$$

119. Tehtävä 119, sivulta 119. Kompleksiluvun $z_1 = 4+4\,\mathrm{i}$ eksponenttimuoto

$$\begin{aligned}
r_1 &= |z_1| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \\
\arg(z_1) &= \arctan\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, \\
z_1 &= 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}},
\end{aligned}$$

Kompleksiluvun $z_2 = -2\,\mathrm{i}$ eksponenttimuoto

$$\begin{aligned}
r_2 &= |z_2| = \sqrt{(-2)^2} = 2, \\
\arg(z_2) &= -\frac{\pi}{2}, \\
z_2 &= 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}},
\end{aligned}$$

Kompleksilukujen z_1 ja z_2 tulo

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= 4\sqrt{2} \cdot 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= 8\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,-\frac{\pi}{4}} \\
&= 8\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= 8 - 8\,\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

Kompleksilukujen z_1 ja z_2 osamäärä

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{4\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)} \\
&= 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}} \\
&= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -2 + 2\,\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_1} &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8} - \mathrm{i}\,\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

120. Tehtävä 120, sivulta 119. Kompleksiluvun $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$ eksponenttimuoto

$$\begin{aligned}
r_1 &= |z_1| = 2, \\
\arg(z_1) &= \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}, \\
z_1 &= 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},
\end{aligned}$$

Kompleksiluvun $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$ eksponenttimuoto

$$\begin{aligned}
r_2 &= |z_2| = 2, \\
\arg(z_2) &= \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \\
z_2 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},
\end{aligned}$$

Kompleksilukujen z_1 ja z_2 tulo

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= 2 \cdot 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0} \\
&= 4(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 4.
\end{aligned}$$

Kompleksilukujen z_1 ja z_2 osamäärä

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= 1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \\
&= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 0 + \mathrm{i}(-1) = -\mathrm{i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_1^4 &= 2^4 e^{i\,4\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= 16 e^{-i\,\pi} \\
&= 16\left(\cos\left(-\pi\right) + i\sin\left(-\pi\right)\right) \\
&= 16(-1 + i\,0) = -16
\end{aligned}
$$

121. Tehtävä 121, sivulta 119. Olkoon $z = re^{i\,\alpha}$. Osoitetaan, että $z^n = r^n e^{i\,n\alpha}$, kun $n \in \mathbb{N}$.

Induktion alkuaskel on voimassa, sillä kun $n = 1$, niin

$$z = z^1 = r^1 e^{i\,1\alpha} = re^{i\,\alpha}.$$

Olkoon väite voimassa, kun $n = k$. Tällöin induktio-oletuksena on

$$z^k = r^k e^{i\,k\alpha}.$$

Kerrotaan induktio-oletus puolittain kompleksiluvulla z. Tällöin

$$
\begin{aligned}
& z^k z = r^k e^{i\,k\alpha} r e^{i\,\alpha} \\
\Leftrightarrow\quad & z^{k+1} = r^k r e^{i\,k\alpha} e^{i\,\alpha} \\
\Leftrightarrow\quad & z^{k+1} = r^{k+1} e^{i\,k\alpha + i\,\alpha} \\
\Leftrightarrow\quad & z^{k+1} = r^{k+1} e^{i(k\alpha+\alpha)} \\
\Leftrightarrow\quad & z^{k+1} = r^{k+1} e^{i((k+1)\alpha)},
\end{aligned}
$$

joten väite on tosi.

122. Tehtävä 122, sivulta 119.

123. Tehtävä 123, sivulta 119.

124. Tehtävä 124, sivulta 120.

125. Tehtävä 125, sivulta 120.

126. Tehtävä 126, sivulta 120.

127. Tehtävä 127, sivulta 120.

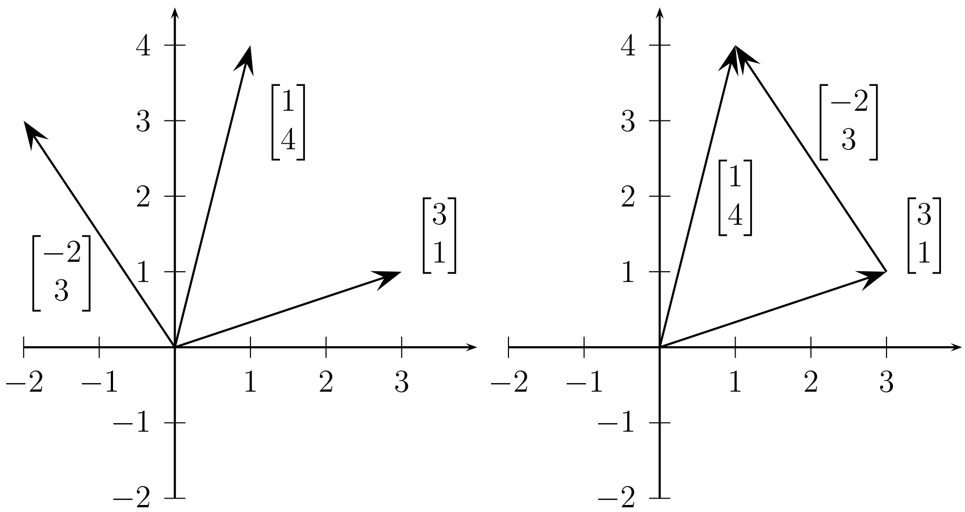
128. Tehtävä 128, sivulta 120.

129. Tehtävä 129, sivulta 120.

Ratkaisuja luvun 4 tehtäviin

130. Tehtävä 130, sivulta 130.

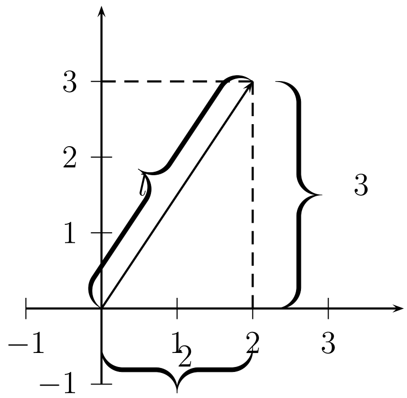
$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$



131. Tehtävä 131, sivulta 130.

132. Tehtävä 132, sivulta 130.

133. Tehtävä 133, sivulta 130.



Pituus l toteuttaa Pythagoraan lauseen mukaan

$$l^2 = 2^2 + 3^3,$$

josta

$$l = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

134. Tehtävä 134, sivulta 130-131.

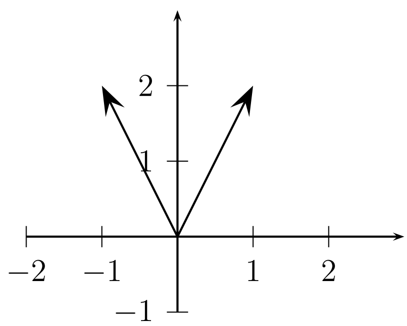
135. Tehtävä 135, sivulta 131. Merkitään $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Vektorin $\mathbf{a}$ normi on

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{86}.$$

136. Tehtävä 136, sivulta 131.

137. Tehtävä 137, sivulta 131.

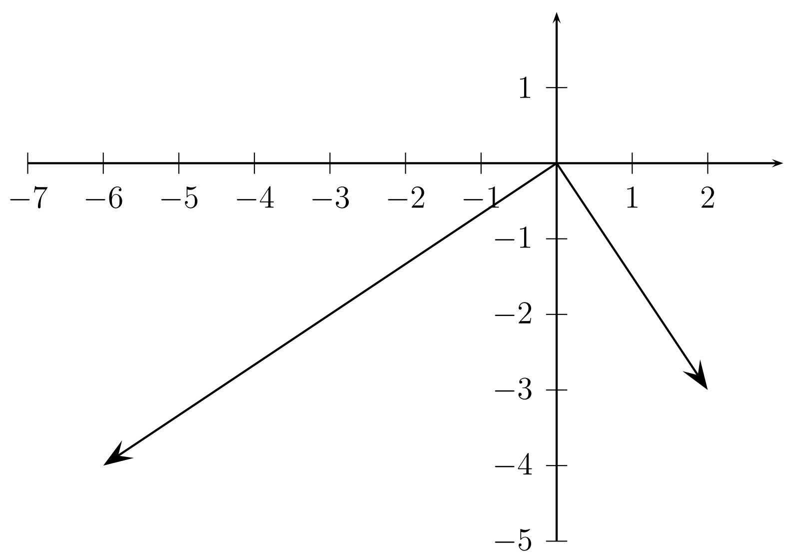
138. Tehtävä 138, sivulta 131.



Kysytty pistetulo

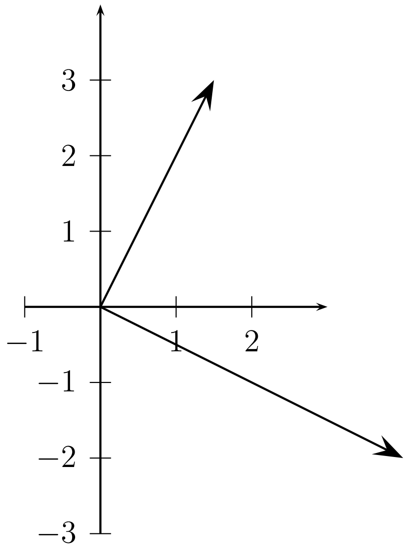
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3.$$

139. Tehtävä 139, sivulta 131. a)



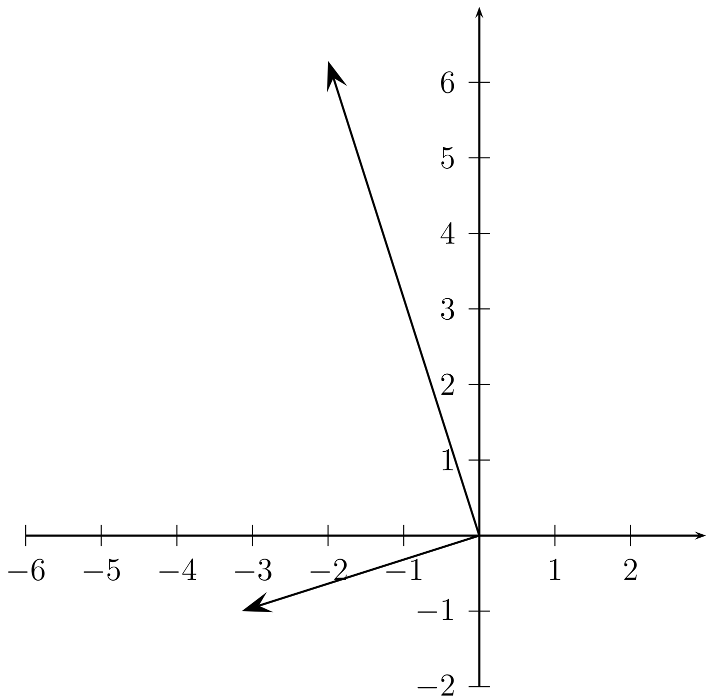
$$\begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = -6 \cdot 2 + (-4) \cdot (-3) = 0.$$

b)



$$\begin{bmatrix} 3/2 \\ 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 0.$$

c)

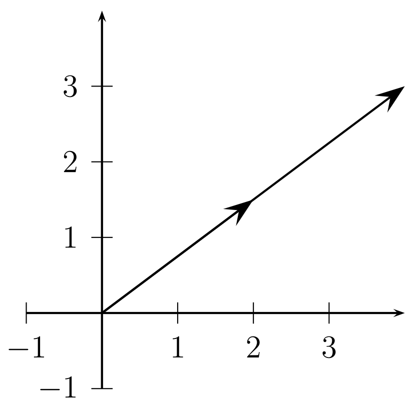


$$\begin{bmatrix} -\pi \\ -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 \\ 2\pi \end{bmatrix} = -\pi \cdot (-2) + (-1) \cdot 2\pi = 2\pi - 2\pi = 0.$$

Havaitaan, että kaikissa tapauksissa vektoriparien pistetulo on nolla. Geometrisesti havaitaan lisäksi, että vektoriparit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

140. Tehtävä 140, sivulta 131.

141. Tehtävä 141, sivulta 131. a)



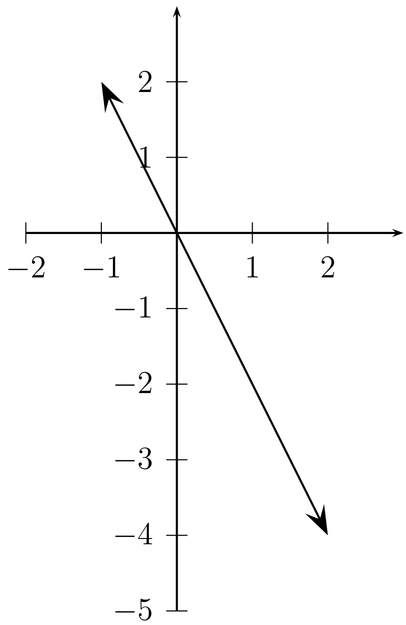
Vektorien pistetulo on

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot 3 = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$$

ja normit ovat

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \right\| &= \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

b)



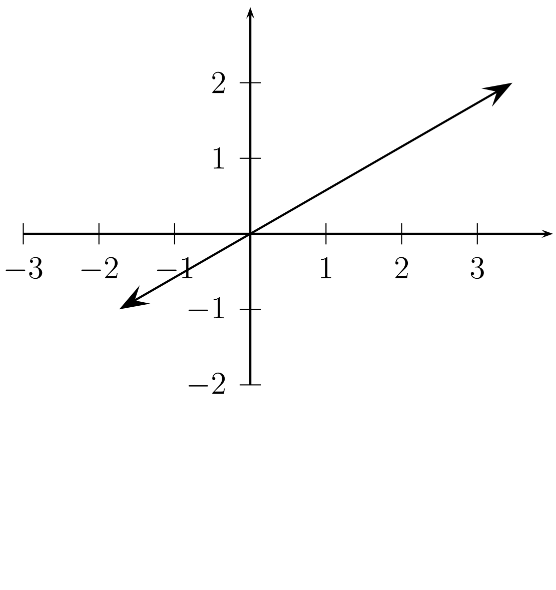
Vektorien pistetulo on

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) = -2 - 8 = -10$$

ja normit ovat

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\ \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| &= \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

c)



Vektorien pistetulo on

$$\begin{bmatrix} \sqrt{12} \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \sqrt{12} \cdot (-\sqrt{3}) + 2 \cdot (-1) = -\sqrt{36} - 2 = -6 - 2 = -8$$

ja normit ovat

$$\begin{aligned} \left|\left|\begin{bmatrix} \sqrt{12} \\ 2 \end{bmatrix}\right|\right| &= \sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4 \\ \left|\left|\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}\right|\right| &= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2. \end{aligned}$$

Havaitaan, että vektorit ovat yhdensuuntaiset ja vektorien pistetulon itseisarvo on sama kuin normien tulo.

142. Tehtävä 142, sivulta 132. Todistetaan väite $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||$ vääräksi yhdellä vastaesimerkillä. Jos valitaan esimerkiksi

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

niin $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 3$ ja $||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| = \sqrt{3^2+4^2}\sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{25} \cdot 1 = 5 \cdot 1 = 5$.

143. Tehtävä 143, sivulta 132. Olkoot $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} = c\mathbf{b}$ ja $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$,$c \in \mathbb{R}$. Merkitään $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Nyt

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = (c\mathbf{b}) \bullet \mathbf{b} = \begin{bmatrix} cb_1 \\ cb_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = cb_1^2 + cb_2^2.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| = ||c\mathbf{b}||\,||\mathbf{b}|| &= \sqrt{(cb_1)^2 + (cb_2)^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \\ &= \sqrt{c^2(b_1^2+b_2^2)(b_1^2+b_2^2)} \\ &= |c|(b_1^2 + b_2^2) \\ &= |c|b_1^2 + |c|b_2^2. \end{aligned}$$

Jos $c > 0$, niin $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||$.

144. Tehtävä 144, sivulta 135. $a_{13} = 2$, $a_{22} = 11$, $a_{41} = -12$, , $(A)_{11} = 0$, $(A)_{23} = -6$.

145. Tehtävä 145, sivulta 135. $b_{11} = 3$, $a_{22} = 6$, $a_{33} = 12$, $a_{44} = 11$.

146. Tehtävä 146, sivulta 135. Tehtävässä matriisi C tarkoittaa tietenkin matriisia B. $b_{21} = 2$, $b_{31} = 6$, $b_{32} = 3$.

147. Tehtävä 147, sivulta 135. $A^T = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 7 & -2 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.

148. Tehtävä 148, sivulta 135. $A_{5\times3}$, $B_{2\times2}$, $C_{2\times4}$, $D_{3\times3}$, $E_{6\times1}$, $F_{4\times2}$.

149. Tehtävä 149, sivulta 136. $B = \begin{bmatrix} 1^2 - 4\cdot 1 & 1^2 - 4\cdot 2 \\ 2^2 - 4\cdot 1 & 2^2 - 4\cdot 2 \\ 3^2 - 4\cdot 1 & 3^2 - 4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 & 1-8 \\ 4-4 & 4-8 \\ 9-4 & 9-8 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

150. Tehtävä 150, sivulta 136. $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

151. Tehtävä 151, sivulta 137. a) $I_{5\times5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $= O_{5\times3} =$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

152. Tehtävä 152, sivulta 137. A, B ja C.

153. Tehtävä 153, sivulta 137. Matriisi A on symmetrinen, sillä $A = A^T$. Matriisi B ei ole, sillä

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq B.$$

154. Tehtävä 154, sivulta 137. $O^T_{2\times3} = O_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

155. Tehtävä 155, sivulta 138. Diagonaalimatriiseja ovat B, D ja F, sillä niissä on nollasta poikkeavia alkioita vain päälävistäjällä.

Yksikkömatriiseja ovat B ja F.

156. Tehtävä 156, sivulta 138. Käytetään Määritelmää 6 (s. 119) ja tutkitaan neliömatriisin $\left(A^T\right)^T$ (i,j)-alkiota

$$\left(\left(A^T\right)^T\right)_{ij} = \left(A^T\right)_{ji} = (A)_{ij}.$$

Matriisin $\left(A^T\right)^T$ (i,j)-alkio on siis sama kuin matriisin A (i,j)-alkio ja matriisien $\left(A^T\right)^T$ ja A kertaluvut ovat samat, joten $\left(A^T\right)^T = A$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

157. Tehtävä 157, sivulta 138. Matriisi

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

eli $(E)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i \geq j \\ 0, & \text{kun } i < j \end{cases}$

158. Tehtävä 158, sivulta 138. Jos $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^5$, niin

a) $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{1}\bullet\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = 1\cdot 5 + 1\cdot 4 + 1\cdot 5 + 1\cdot 6 + 1\cdot 10 = 30.$

$\mathbf{1}\bullet\mathbf{a}$ on vektorin $\mathbf{a}$ komponenttien summa ja $\dfrac{1}{5}\mathbf{1}\bullet\mathbf{a}$ on vektorin $\mathbf{a}$ komponenttien keskiarvo.

159. Tehtävä 159, sivulta 138. $C = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & 2+4 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \\ 4+1 & 4+2 & 4+3 & 4+4 \\ 5+1 & 5+2 & 5+3 & 5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

160. Tehtävä 160, sivulta 141.

a) $I_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $O_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $3I_{2\times 2} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

d)$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2 & 1-0 \\ -2-0 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

161. Tehtävä 161, sivulta 141. Laskutoimituksista ainoastaan $C + D$ ei ole määritelty, sillä C on 2×3-matriisi ja D on 3×2-matriisi. Muut laskutoimitukset ovat määriteltyjä.

(a) $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+5 & 1+7 \\ -2+8 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $A - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-5 & 1-7 \\ -2-8 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $A^T + B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+5 & -2+7 \\ 1+8 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

(e) $C^T + D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+7 & -2-1 \\ 1-2 & 3+3 \\ -4-5 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 6 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$

(f) $dD = 5\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 7 & 5\cdot(-1) \\ 5\cdot(-2) & 5\cdot 3 \\ 5\cdot(-5) & 5\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & -5 \\ -10 & 15 \\ -25 & 20 \end{bmatrix}$

(g) $d\left(D^T+C\right)=5\left(\begin{bmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right)=5\begin{bmatrix} 7 & -1 & -9 \\ -2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix} 35 & -5 & -45 \\ -9 & 30 & 30 \end{bmatrix}$

162. Tehtävä 162, sivulta 141. Ratkaistaan yhtälöstä

$$3A-2B+C=D$$

C vähentämällä puolittain $3A$ ja lisäämällä puolittain $2B$ eli (huomaa, että symbolilla O merkitään nollamatriisia)

$$\begin{aligned} & 3A-2B+C-3A+2B=D-3A+2B \\ \Leftrightarrow\ & 3A-3A-2B+2B+C=D-3A+2B \\ \Leftrightarrow\ & O-O+C=D-3A+2B \\ \Leftrightarrow\ & C=D-3A+2B. \end{aligned}$$

Tämän jälkeen matriisi C voidaan laskea tunnettujen matriisien avulla

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & -12 \\ 9 & -15 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -14 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 14 & -9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -14 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & -26 \\ 18 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

163. Tehtävä 163, sivulta 141. Olkoot A ja B kertalukua $m\times n$. Tällöin

$$\begin{aligned} (A-B)^T &\overset{M14}{=} (A+(-1)B)^T \\ &\overset{L5(3)}{=} A^T+((-1)B)^T \\ &\overset{L5(4)}{=} A^T+(-1)B^T \\ &\overset{\mathrm{M14}}{=} A^T-B^T. \end{aligned}$$

164. Tehtävä 164, sivulta 142. Olkoot A, B ja C 2×3-matriiseja. Tällöin

(2): $((A+B)+C)_{ij}\overset{M12}{=}(A+B)_{ij}+(C)_{ij}\overset{M12}{=}(A)_{ij}+(B)_{ij}+(C)_{ij}.$

Toisaalta $(A+(B+C))_{ij} \overset{M12}{=} (A)_{ij} + (B+C)_{ij} \overset{M12}{=} (A)_{ij} + (B)_{ij} + (C)_{ij}$.

(3): $\big((A+B)^T\big)_{ij} \overset{M6}{=} (A+B)_{ji} \overset{M12}{=} (A)_{ji} + (B)_{ji} \overset{M6}{=} (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij}$.

(4): $\big((cA)^T\big)_{ij} \overset{M6}{=} (cA)_{ji} \overset{M13}{=} c(A)_{ji} \overset{M6}{=} c(A^T)_{ij}$.

165. Tehtävä 165, sivulta 142. a) Luvulla 2 kerrotusta matriisin A alkiosta vähennetään vastaava matriisin B alkio ja lisätään näin saatuun alkioon indeksien summa.

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 - 5 + 1 + 1 & 2\cdot 1 - 7 + 1 + 2 \\ 2\cdot(-2) - 8 + 2 + 1 & 2\cdot 3 - 4 + 2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$.

166. Tehtävä 166, sivulta 142.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \dagger \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+0+5-2 & 0-2+7-4 \\ 0+1+8-2 & 1+3+4-4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

167. Tehtävä 167, sivulta 146. $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 15 & 9 \end{bmatrix}$

$AD = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & -14 \\ 9 & 5 & -16 \end{bmatrix}$

$A^TB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$

$A^T\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix}$

$D\mathbf{d}$ ei ole määritelty.

$D^T\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ -14 \end{bmatrix}$

168. Tehtävä 168, sivulta 147.

$$
\begin{aligned}
AI &= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2+0+0 & 0+(-5)+0 & 0+0+2 \\ -1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+6 \\ 4+0+0 & 0+2+0 & 0+0+1 \end{bmatrix} = A
\end{aligned}
$$

Vastaavasti

$$
\begin{aligned}
IA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2+0+0 & 0+(-5)+0 & 0+0+2 \\ -1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+6 \\ 4+0+0 & 0+2+0 & 0+0+1 \end{bmatrix} = A
\end{aligned}
$$

169. Tehtävä 169, sivulta 147.

170. Tehtävä 170, sivulta 147.

171. Tehtävä 161, sivulta 147. Matriisipotenssi on määritelty neliömatriiseille.

$$
\begin{aligned}
A^3 &= AAA \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 10 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37 & 28 \\ 76 & 108 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

172. Tehtävä 172, sivulta 147. Valitaan esimerkiksi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Tällöin $AB = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ ja $BA = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

173. Tehtävä 173, sivulta 147. Merkitään

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.
$$

Nyt

$$A(BC) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{bmatrix},$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} (A(BC))_{11} &= a_{11}b_{11}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{12}b_{22}c_{21}, \\ (A(BC))_{12} &= a_{11}b_{11}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{12}b_{22}c_{22}, \\ (A(BC))_{21} &= a_{21}b_{11}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{22}b_{22}c_{21}, \\ (A(BC))_{22} &= a_{21}b_{11}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{22}. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$(AB)C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

jolloin

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{11} &= a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21}, \\ ((AB)C)_{12} &= a_{11}b_{11}c_{12} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{22}c_{22}, \\ ((AB)C)_{21} &= a_{21}b_{11}c_{11} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{22}c_{21}, \\ ((AB)C)_{22} &= a_{21}b_{11}c_{12} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{22}c_{22}. \end{aligned}$$

174. Tehtävä 174, sivulta 148. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A(B+C) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11} + c_{11}) + a_{12}(b_{21} + c_{21}) & a_{11}(b_{12} + c_{12}) + a_{12}(b_{22} + c_{22}) \\ a_{21}(b_{11} + c_{11}) + a_{22}(b_{21} + c_{21}) & a_{21}(b_{12} + c_{12}) + a_{22}(b_{22} + c_{22}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} AB + AC &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11} + c_{11}) + a_{12}(b_{21} + c_{21}) & a_{11}(b_{12} + c_{12}) + a_{12}(b_{22} + c_{22}) \\ a_{21}(b_{11} + c_{11}) + a_{22}(b_{21} + c_{21}) & a_{21}(b_{12} + c_{12}) + a_{22}(b_{22} + c_{22}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

175. Tehtävä 175, sivulta 148. Jos esimerkiksi $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ ja $b \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ on $(AB)^T$ määritelty, mutta tuloa $A^T B^T$ ei ole. Vaikka A ja B olisivat neliömatriiseja, ei väite ole voimassa, sillä esimerkiksi jos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

niin

$$(AB)^T = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$$

ja

$$A^T B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$$

176. Tehtävä 176, sivulta 148. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} au + bw & av + bx \\ cu + dw & cv + dx \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} au + bw & cu + dw \\ av + bx & cv + dx \end{bmatrix}$$

ja

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} u & w \\ v & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ua + wb & uc + wd \\ va + xb & vc + xd \end{bmatrix}$$

177. Tehtävä 177, sivulta 148. Merkitään

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Tarkastellaan matriisituloa

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n.$$

Tämä on sama kuin pistetulon $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ määritelmä.

a) $\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$,
b) $||\mathbf{x}||^2 = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$, c) $\mathbf{1}^T \mathbf{x}$.

178. Tehtävä 178, sivulta 156. a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

179. Tehtävä 179, sivulta 156. a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right]$

180. Tehtävä 180, sivulta 156. a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \sin(\pi) & 2 & 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \pi \end{bmatrix}$

c) ei ole lineaarinen yhtälöryhmä.

181. Tehtävä 181, sivulta 156.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

joten ei ole ratkaisu.

182. Tehtävä 182, sivulta 157.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 13 \\ -31 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ 11 \end{bmatrix},$$

joten ei ole ratkaisu.

183. Tehtävä 183, sivulta 157. Matriisi B

184. Tehtävä 185, sivulta 157.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

joten ratkaisu on $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

185. Tehtävä 185, sivulta 157.

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

186. Tehtävä 186, sivulta 157. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\quad$ ja $\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ $\quad$ ja $\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\quad$ ja $\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

187. Tehtävä 187, sivulta 157.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A - 5I & \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

joten ratkaisuksi saadaan $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases}$ eli $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

188. Tehtävä 188, sivulta 158.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right],$$

joten ratkaisuksi saadaan $\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{6}t \\ x_2 = \frac{11}{6}t \\ x_3 = t \end{cases}$ eli $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6}t \\ \frac{11}{6}t \\ t \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

189. Tehtävä 189, sivulta 158.

$$
\begin{array}{ll}
\begin{bmatrix} A^TA & A^T\mathbf{b} \end{bmatrix} & \left[\begin{array}{rr|r} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2/3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & 14/3 & -1 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -3/14 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 8/7 \\ 0 & 1 & -3/14 \end{array}\right],
\end{array}
$$

joten ratkaisuksi saadaan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8/7 \\ -3/14 \end{bmatrix}$.

190. Tehtävä 190, sivulta 158. a)

$$
\begin{array}{ll}
\begin{bmatrix} A - 3A & \mathbf{b} \end{bmatrix} & \left[\begin{array}{rr|r} -26 & 12 & 15 \\ -40 & 18 & 25 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -6/13 & -15/26 \\ -40 & 18 & 25 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -6/13 & -15/26 \\ 0 & -6/13 & 50/26 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & -6/13 & 50/26 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & -25/6 \end{array}\right],
\end{array}
$$

joten ratkaisuksi saadaan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ -25/6 \end{bmatrix}$.

b)

$$
\begin{aligned}
[A - 3I \quad \mathbf{b}] \qquad & \left[\begin{array}{rr|r} 10 & -6 & 15 \\ 20 & -12 & 25 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{rr|r} 10 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{lr|r} 1 & -3/5 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{lr|l} 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

191. Tehtävä 191, sivulta 160. Kyllä, sillä

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2+0-1 & -2+2+0 & 2-4+2 \\ 2+0-2 & -2+3+0 & 2-6+4 \\ 1+0-1 & -1+1+0 & 1-2+2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2-2+1 & 2-3+1 & 1-2+1 \\ 0+2-2 & 0+3-2 & 0+2-2 \\ -2+0+2 & -2+0+2 & -1+0+2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.
\end{aligned}
$$

192. Tehtävä 192, sivulta 160. Ei ole, sillä esimerkiksi $(AB)_{21} = 3/2 + 2/3 + 1/2 \neq 0$.

193. Tehtävä 193, sivulta 160. (2): $A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I$
$\left(A^{-1}\right)^T A = \left(AA^{-1}\right) = I^T = I$.

(3): $(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A\,(BB^{-1})\,A^{-1} = AA^{-1} = I$
$(B^{-1}A^{-1})\,(AB) = B^{-1}\,(A^{-1}A)\,B = B^{-1}B = I$.

194. Tehtävä 194, sivulta 160.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/10 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

195. Tehtävä 195, sivulta 160.

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -ab+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vastaavasti

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

196. Tehtävä 196, sivulta 160. Olkoot $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$.

Nyt

$$AB = \begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix},$$

josta

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (aw+by)(cx+dz)-(cw+dy)(ax+bz) \\ &= awcx+axdz+bycx+bydz-cwax-cwbz-dyax-dybz \\ &= awdz+bycx-cwbz-dyax \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \det(A)\det(B) &= (ad-bc)(wz-yx) \\ &= adwz-adyx-bcwz+bcyx. \end{aligned}$$

Lausekkeet ovat samat, joten 2×2-matriiseille pätee $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

197. Tehtävä 197, sivulta 161. Jos esimerkiksi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, niin

$$\det(A+B) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\right) = 10-6 = 4$$

ja

$$\det(A)+\det(B) = 1+(-2) = -1.$$

198. Tehtävä 198, sivulta 161. Oletetaan, että A^{-1} on olemassa. Tällöin $AA^{-1} = I$, josta $\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$. Tehtävän 196 tuloksesta $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ saadaan $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, joten tulon nollasäännön perusteella välttämättä $\det(A) \neq 0$.

199. Tehtävä 199, sivulta 161. Tehtävässä 195 on todistettu $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ kääntyvä. Tehtävässä 196 todistettu A kääntyvä $\Rightarrow \det(A) \neq 0$. Niinpä A on kääntyvä $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

200. Tehtävä 200, sivulta 161. $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

201. Tehtävä 201, sivulta 161. $AX = C \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \Leftrightarrow IX = A^{-1}C \Leftrightarrow X = A^{-1}C$.

202. Tehtävä 202, sivulta 161. $BX = A + B \Leftrightarrow B^{-1}BX = B^{-1}(A + B) \Leftrightarrow IX = B^{-1}A + B^{-1}B \Leftrightarrow X = B^{-1}A + I$.

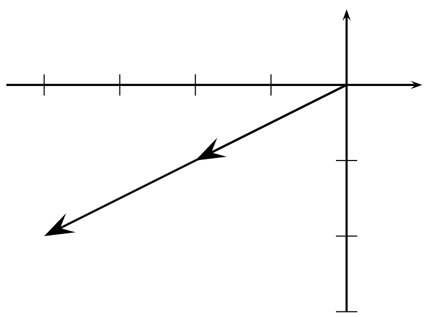
203. Tehtävä 203, sivulta 161. Koska $II = I$ (vrt. käänteismatriisin määritelmä), on $I^{-1} = I$.

204. Tehtävä 204, sivulta 161. Koska $OX = O$ kaikilla kertaluvultaan sopivilla matriiseilla X, on $OX \neq I$, eikä nollamatriisille ole käänteismatriisia.

205. Tehtävä 205, sivulta 161.

$$
\begin{aligned}
(DC)^{-1} &= C^{-1}D^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 14 & 14 & 3 \\ 25 & 6 & 19 \\ 20 & 8 & 12 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

206. Tehtävä 206, sivulta 169. Tiedetään, että $A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Nyt $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



207. Tehtävä 207, sivulta 169.

$$
\begin{aligned}
& \det(A - \lambda I) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0
\end{aligned}
$$

Ominaisarvoiksi saadaan siis $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_2 = 1$.

208. Tehtävä 208, sivulta 169.

$$
\begin{aligned}
& (A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

jota vastaavasta kokonaismatriisista saadaan ratkaisua ominaisarvoa λ_1 vastaava ominaisvektori

$$
\left[\begin{array}{rr|r} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right]
$$
$$
\left[\begin{array}{rr|r} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$
$$
\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],
$$

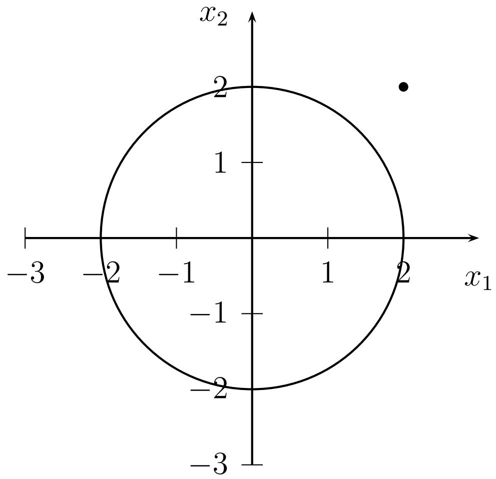
joten ominaisvektorit ovat $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Vastaavasti saadaan ominaisarvoa λ_2 vastaava ominaisvektori

$$
\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right]
$$
$$
\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],
$$

joten ominaisvektorit ovat $\begin{bmatrix} \mathbf{x} = & t \\ & -t \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

209. Tehtävä 209, sivulta 173-174. Koska $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, niin $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 2$, joten joukon S pisteet muodostavat origokeskisen 2-säteisen ympyrän kaaren.



Lähin ja kaummainen piste löydetään, kun pisteen $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ kautta piirretään ympyrälle normaali. Tämä normaali kulkee origon kautta ja normaalin muodostaa suora $x_1 = x_2$.

a) Lähin joukon S piste saadaan, kun tiedetään $x_1 = x_2$ ja se sijaitsee ensimmäisessä neljänneksessä

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_1^2 + x_1^2} = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x_1^2 = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1^2 = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Eli lähin piste on $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

b) Kauimmainen piste sijaitsee ympyrän vastakkaisella puolella, joten kauimmainen piste on $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Pisteen $\mathbf{y}$ etäisyys joukon S pisteestä on

$$d = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2},$$

joten etäisyydet ovat

$$\begin{aligned}
d_1 = \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2 + (\sqrt{2}-2)^2} &= \sqrt{2(\sqrt{2}-2)^2} \\
&= |\sqrt{2}-2|\sqrt{2} \\
&= 2\sqrt{2}-2, \\
d_2 = \sqrt{(-\sqrt{2}-2)^2 + (-\sqrt{2}-2)^2} &= \sqrt{2(-(\sqrt{2}+2))^2} \\
&= |-(\sqrt{2}+2)|\sqrt{2} \\
&= 2+2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$